ガウスの法則

クーロンの法則を用いると電気量+qの点電荷の周囲には、大きさが

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{1}$$

の電場が作られることが分かる。電荷を中心とした半径Rの球面でこの電荷を囲んだとすると、この球面上($r = R$)での電場の大きさと球の表面積の積は

$$4\pi R^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

となる。この関係式は、次のように流体の湧き出し量の計算と同じ式となる。

いま、点電荷の位置(湧き出し口)から単位時間あたりに量が q/ε_0 の流体が湧き出し、放射状に流れ出ていく。流体が湧き出し口から距離Rの位置では速度vで流れていたとすると、この球面上での流れの速さと球の表面積の積$4\pi R^2 v$で、この量は単位時間当たりに流体が湧き出す量と一致するので、

$$4\pi R^2 v = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{3}$$

となり、式(2)と一致する。そこで、この考え方を次のように一般化する。

任意の形状の閉曲面（ガウス面と呼ぶ）を通過する電場 E について、その法線成分 E_nをガウス面について積分する。このとき、ガウス面内に電気量 q があれば、

$$\int E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

となり、ガウス面内に電荷がなければ

$$\int E_n dS = 0 \tag{5}$$

となる。式(5)は、閉曲面内に流体の湧き出しがない場合に対応する。式(4)、(5)の関係をガウスの法則と呼ぶ。

ガウスの法則の例として、高さが h で 外径 a の内円筒と、内径 b の外円筒の中心を一致させ、それぞれに電気量+q 、$-q$ を与えた同軸円筒を考える。円筒間に生じる電場の向きはその半径方向に、大きさが $E(r)$となる。電場を求めるために、帯電した円筒間に半径 r の円筒状のガウス面を考えると、ガウス面のどの位置でも電場はガウス面を垂直に通過するため

$$\int E(r) dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

となる。このとき、面積の積分に対する電場は定数として扱ってよいので、$\int E(r)dS = E(r)\int dS$と書け、その積分の結果は半径 rの円筒の側面積となる。従って、円筒間に生じる電場の大きさは

$$E(r)2\pi rh = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 hr} \tag{5}$$

となる。また、電気量 q'の試験電荷を外円筒の位置($r = b$)から $r = R$ まで移動させたとすると、電位差ΔVは

$$\Delta V = -\frac{1}{q'}\int_i^f F(r)dr = -\frac{1}{q'}\int_i^f E(r)dr$$

$$= -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_b^R \frac{dr}{r} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}[\ln r]_b^R = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{b}{R} \tag{6}$$

となる。$r = b$ の外円筒を電位の基準($V_i = 0$)とすると、

$$V - 0 = V(R) - 0 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{b}{R} \tag{7}$$

となり、Rを任意の位置を表す rで書き直すと、

$$V(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{b}{r} \tag{8}$$

となる。この結果は、円筒間の電位は $\ln r$に対して比例関係となることを示す。