

密度の測定(間接測定)  
(実験指針P25~28)

予習項目

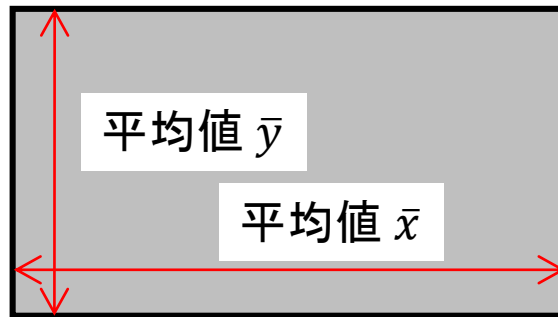
物理学実験指針の「P25~28」をよく読みなさい。

- (1)  $z$  が 2つの測定値 $x_i, y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ から計算できる場合、 $z$  の標本標準偏差を求めよ。
- (2) 密度の標本標準偏差 $\delta\rho$ の関係式を導出せよ。

ここでもまずは、指針を読み、その後、本スライド資料を読んで、解答をノートに作成しなさい。

複数の測定結果を関係式に代入して、最終結果を求める間接的な測定で、「測定量(物理量)のもっともらしい値」を推定することを考える。

簡単に考えるために、まず長方形の面積を実験で求めることを考えよう。

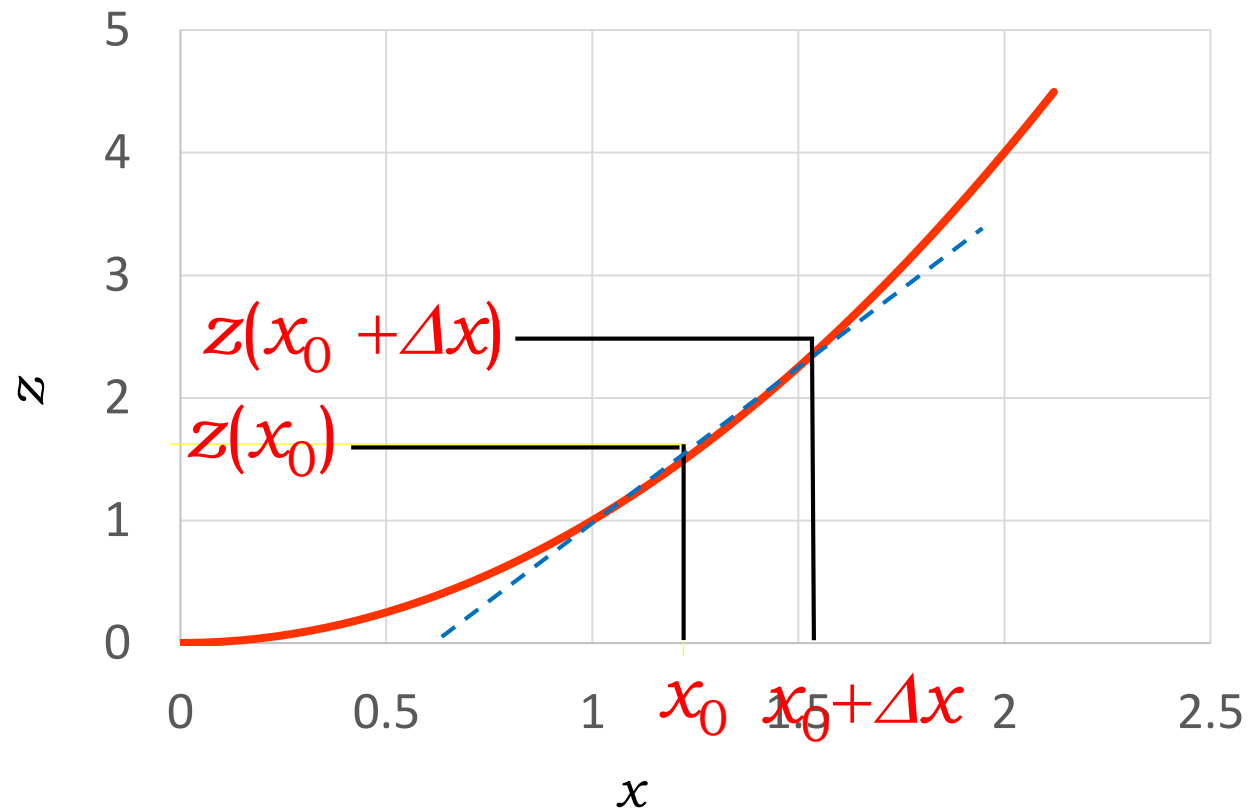


面積は  $S = x \times y$  で計算できるが、実験では測定結果を用いるので

$$x \rightarrow \bar{x} \pm \delta x$$

$$y \rightarrow \bar{y} \pm \delta y$$

と考える必要がある。この  $\delta x$ 、 $\delta y$  が最終結果にどのように影響するか？



測定量と、計算結果の関係を考えよう。  
 図は  $x$  という測定量から  $z(x) = x^2$  という計算をした結果である。この関数上で、測定量が  $x_0$  のときに計算される量は

$$z(x_0) = (x_0)^2$$

となる。

もし測定量  $x_0$  が「わずかにずれる」  
 ( $x_0 \rightarrow x_0 + \Delta x$ ) と、計算される量も

$$z(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$$

となる。 $x_0$  のずれの影響を考えてみよう。

2つの計算結果の差を求める。

$$\begin{aligned}z(x_0 + \Delta x) &= (x_0 + \Delta x)^2 \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

$$\text{—) } z(x_0) = x_0^2$$

---

$$z(x_0 + \Delta x) - z(x_0) = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

$\Delta x$ はわずかなずれなので、その2乗  $(\Delta x)^2$ をゼロとする。また、左辺を $\Delta z$ とすると

$$\underbrace{z(x_0 + \Delta x) - z(x_0)}_{\Delta z \text{ とする}} = 2x_0\Delta x + \underbrace{(\Delta x)^2}_0$$

$$\Delta z = 2x_0\Delta x$$

ここで $2x_0$ は、与えられた関数  $z(x) = x^2$  を $x$ で微分し、 $x = x_0$ を代入した結果となる。つまり、測定量が  $x_0$  から $\Delta x$ だけずれると、計算される量  $z$  は「 $x_0$ での微分係数と $\Delta x$ の積」だけずれることを意味する。

そこで、

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} = 2x \Big|_{x=x_0} = 2x_0$$

のように書くことにしよう。

$x_0$ のずれの影響は、

$$\Delta z = \left. \frac{\Delta z}{\Delta x} \right|_{x=x_0} \Delta x$$

となる。

さて、 $x$ を $n$ 回測定し、その測定結果 $x_i$ ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) から、 $z$ を計算する。それぞれの $x_i$ に対して、 $z_i$ が得られるので、 $z$ の平均値(最良推定値)を求める。

標本平均 $\bar{x}$ 、残差 $v_i = x_i - \bar{x}$  とすると、 $|v_i|$ が小さければ、計算結果のずれは $x$ の標本平均 $\bar{x}$ での微分係数と残差 $v_i$ の積で表されるので

$$z_i = z(x_i) = z(\bar{x} + v_i) \cong z(\bar{x}) + \left. \frac{dz(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} v_i$$

が成り立つ。この平均値は $z$ の最良推定値 $\bar{z}$ であり、

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\sum_{i=1}^n z(x_i)}{n} \\ &\cong \frac{\sum_{i=1}^n z(\bar{x})}{n} + \left. \frac{dz(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n} = z(\bar{x}) \end{aligned}$$

となる。ここで $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ を使った。この結果は、 $z$ の最良推定値 $\bar{z}$ は、標本平均 $\bar{x}$ を用いて計算した $z$ で良いことが解る。

このとき $z$ の標本標準偏差の二乗は

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \\ &\approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{dz(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} v_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \left. \frac{dz(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \right)^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 \\ &= \left( \left. \frac{dz(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \right)^2 \sigma_x^2 \end{aligned}$$

$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$   
 ← 標本標準偏差

が成り立つ。従って、 $z$ の標本標準偏差は

$$\sigma_z = \left| \left. \frac{dz(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \right| \sigma_x$$

次に、 $z$  が 2つの物理量の測定値の組

$x_i, y_i (i = 1, 2, \dots, n)$  から計算できる場合を考えよう。標本平均  $\bar{x}, \bar{y}$ 、残差  $v_i = x_i - \bar{x}$ ,  $w_i = y_i - \bar{y}$  とすると、

$$\begin{aligned} z_i &= z(x_i, y_i) = z(\bar{x} + v_i, \bar{y} + w_i) \\ &\cong z(\bar{x}, \bar{y}) + \left. \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} v_i + \left. \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} w_i \end{aligned}$$

従って、 $z$  の平均値、すなわち  $z$  の最良推定値  $\bar{z}$  は

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\sum_{i=1}^n z(x_i, y_i)}{n} \\ &\cong \frac{\sum_{i=1}^n z(\bar{x}, \bar{y})}{n} + \left. \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n} + \left. \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{n} \\ &= z(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

となる。ここで  $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n w_i = 0$  を使った。

\*  $z$  が 2つ以上の変数の関数である場合には、 $\Delta z(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \Delta y$  のように書く。  
ここで  $\partial$  は偏微分を表す。

このとき  $z$  の標本標準偏差の二乗は

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \\ &\approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} v_i + \left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} w_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left[ \left( \left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 + \left( \left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \sum_{i=1}^n w_i^2 \right] \\ &= \left( \left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \sigma_y^2\end{aligned}$$

$2\sum_{i=1}^n v_i w_i = 0$   
とした。

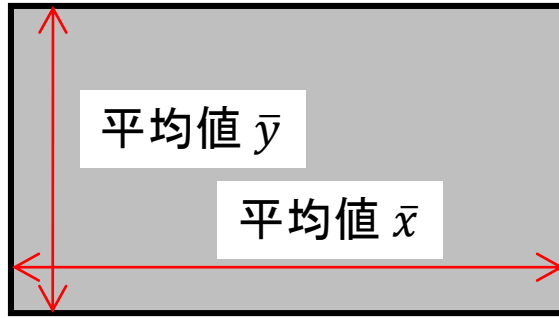
が成り立つ。従って、

$$\sigma_z = \sqrt{\left( \left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \sigma_y^2}$$

それぞれの物理量のタイプBの不確かさまでを考慮する(合成標準不確かさの2乗  $\delta x_c^2$  と  $\delta y_c^2$  を用いる)と

$$\delta z = \sqrt{\left( \left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \delta x_c^2 + \left( \left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \delta y_c^2}$$

不確かさの伝播法則



### 長方形の面積測定の場合

$$S(x, y) = x \times y$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} = \left. \frac{\partial(xy)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} = y \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} = \bar{y}$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} = \left. \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} = x \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} = \bar{x}$$

$$\delta S = \sqrt{\left( \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 (\delta x_c)^2 + \left( \left. \frac{\partial S}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 (\delta y_c)^2}$$

$$= \sqrt{(\bar{y})^2 (\delta x_c)^2 + (\bar{x})^2 (\delta y_c)^2}$$

また  $\bar{S}$  の相対不確かさは、

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\bar{S}} &= \frac{1}{\bar{S}} \sqrt{(\bar{y})^2 (\delta x_c)^2 + (\bar{x})^2 (\delta y_c)^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{\bar{y}}{\bar{S}} \right)^2 (\delta x_c)^2 + \left( \frac{\bar{x}}{\bar{S}} \right)^2 (\delta y_c)^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{\delta x_c}{\bar{x}} \right)^2 + \left( \frac{\delta y_c}{\bar{y}} \right)^2} \end{aligned}$$

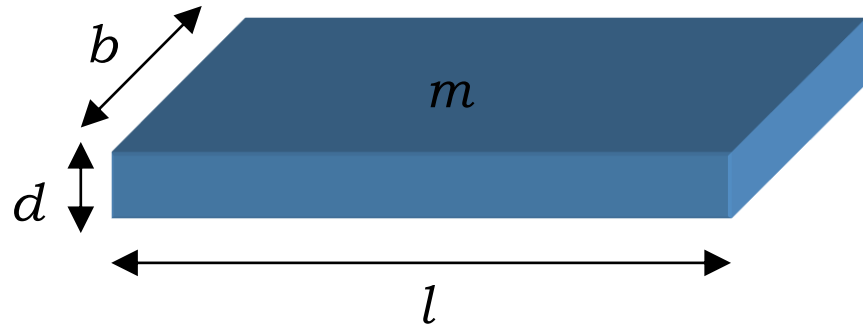
なので、不確かさの式は

$$\delta S = \bar{S} \sqrt{\left( \frac{\delta x_c}{\bar{x}} \right)^2 + \left( \frac{\delta y_c}{\bar{y}} \right)^2}$$

と求まる。この式のカッコ内が、測定量  $x, y$  の相対不確かさであることに注意せよ。



密度  $\rho$  の測定の場合



$$\rho = \frac{m}{lbd}$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial l} \right|_{\substack{l=\bar{l} \\ b=\bar{b} \\ d=\bar{d} \\ m=\bar{m}}} = \left. \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{m}{lbd} \right) \right|_{\substack{l=\bar{l} \\ b=\bar{b} \\ d=\bar{d} \\ m=\bar{m}}} = -\frac{m}{l^2 bd} \Big|_{\substack{l=\bar{l} \\ b=\bar{b} \\ d=\bar{d} \\ m=\bar{m}}} = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}^2 \bar{b} \bar{d}}$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial l} \right|_{\substack{l=\bar{l} \\ b=\bar{b} \\ d=\bar{d} \\ m=\bar{m}}} = \boxed{\phantom{0}}$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial l} \right|_{\substack{l=\bar{l} \\ b=\bar{b} \\ d=\bar{d} \\ m=\bar{m}}} = \boxed{\phantom{0}}$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial l} \right|_{\substack{l=\bar{l} \\ b=\bar{b} \\ d=\bar{d} \\ m=\bar{m}}} = \boxed{\phantom{0}}$$

$$\frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}} \sqrt{\left( \left. \frac{\partial \rho}{\partial l} \right|_{\substack{l=\bar{l} \\ b=\bar{b} \\ d=\bar{d} \\ m=\bar{m}}} \right)^2 (\delta l_C)^2 + \left( \left. \frac{\partial \rho}{\partial b} \right|_{\substack{l=\bar{l} \\ b=\bar{b} \\ d=\bar{d} \\ m=\bar{m}}} \right)^2 (\delta b_C)^2 + \left( \left. \frac{\partial \rho}{\partial d} \right|_{\substack{l=\bar{l} \\ b=\bar{b} \\ d=\bar{d} \\ m=\bar{m}}} \right)^2 (\delta d_C)^2 + \left( \left. \frac{\partial \rho}{\partial m} \right|_{\substack{l=\bar{l} \\ b=\bar{b} \\ d=\bar{d} \\ m=\bar{m}}} \right)^2 (\delta m_C)^2} = \boxed{\phantom{0}}$$