

ボルダの振り子による 重力加速度の測定

[実験テーマの概要]

ボルダ (Borda) の振り子の周期を測定することにより, 重力加速度の大きさを求める. これまでの人生で最も精密な実験 (相対精度 10^{-4}).

ボルダの振り子の周期の式の導出

実態振り子の一つであるボルダの振り子の特徴

吊り具のナイフエッジが回転軸
→吊り具も慣性モーメントを持つ

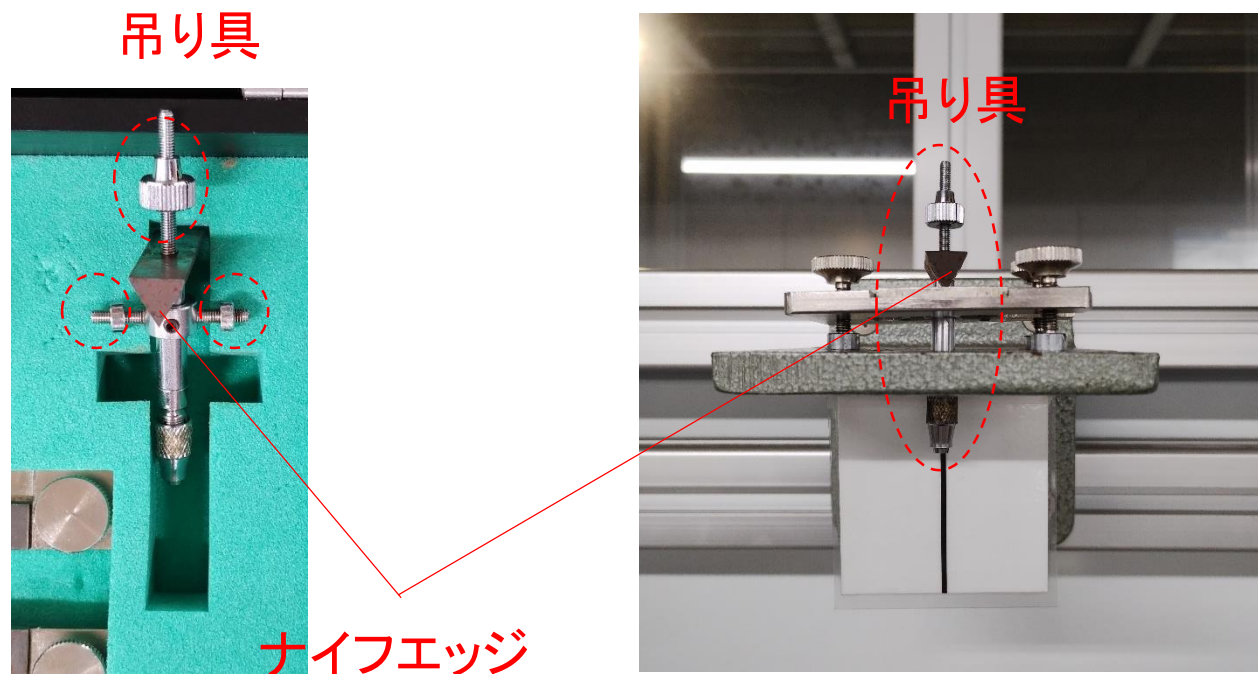
吊り具の周期を全体の周期と合わせる
→吊り具の慣性モーメントを無視できる
(詳しくは、指針の原理を参照)

このときおもりの慣性モーメントは、おもりの半径を r とすると

$$I = \frac{2}{5}mr^2 + mh_1^2$$

なので、周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{h_1}{g} \left\{ 1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{h_1} \right)^2 \right\}}$$



よって、周期を測定すれば、重力加速度の大きさは

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(h_1 + \frac{2r^2}{5h_1} \right)$$

と表せる。

ボルダの振り子の周期の式

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h_1}{g} \left\{ 1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{h_1} \right)^2 \right\}}$$

は、 θ が小さいとした近似している。近似できない場合、2階微分方程式を楕円積分して解を求める必要がある。この結果、実態振り子の周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h_1}{g} \left\{ 1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{h_1} \right)^2 \right\}} \left(1 + \frac{\theta^2}{16} + \dots \right)$$

のように、角度の補正項が必要となり、重力加速度の大きさは、補正項の2項目までを書き、

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(h_1 + \frac{2r^2}{5h_1} \right) \left(1 + \frac{\theta^2}{8} \right)$$

と表せる。

演習問題の解答

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(h_1 + \frac{2r^2}{5h_1} \right) \delta$$

δ は、補正項 $\delta = 1 + \theta^2/8$

振れ角 θ (°)	振れ角 θ (rad)	$\theta^2/8$ (rad)	$\delta = 1 + \theta^2/8$ (rad)
1.1	0.019	0.000046	1.000046
2.3	0.040	0.00020	1.00020
5.4	0.094	0.0011	1.0011

2桁

2桁

2桁

5-6桁

$\delta = 1$: $g = \frac{9.7814}{} \text{m/s}^2$, 文献値とのずれ -0.2%

$\delta = 1 + \theta^2/8$: $g = \frac{9.7922}{} \text{m/s}^2$, -0.06%

・ θ が5.4°では、1/1000の桁がずれる

・ $\delta = 1 + \theta^2/8$ なので(1に加えるので)角度は2桁程度の測定で十分

実験装置



実験の手順(指針からの変更点、等)

4.8.4 実験方法

A. 実験準備

- (1) 吊り具の支点 O と、チャックの先端 B までの長さ s と、球の直径 $2r$ を数回測る.
- (2) 図 4.8.1 を参照し、座金 E の上に水準器をおき、ねじ C によって E を水平にする.
- ~~(3) 球と吊り具のチャック B の間に針金を取り付け、その間の針金の長さ l_0 を数回測る.~~ l_0 は測定しない
- ~~(4) 吊り具を座金に載せて、後ろに置いた角度目盛紙によって角度振幅が $5\sim 6^\circ$ になるよう振り子を 10 回振動させ、周期 T_0 を測る.~~
- ~~(5) チャック B から針金をはずし、吊り具のみを振動させ、その周期 T_2 を (4) で求めた T_0 と等しくなるように、吊り具のねじ D を調節する.~~

周期が約2秒(1.9 s ~ 2.1 s)
5周期で9.5 s ~ 10.5 sになるように

B. 実験

- ~~(6) 球と吊り具のチャック B の間の針金の長さが、(3) で求めた長さ l_0 となるべく等しくなるように針金を取り付け、その間の針金の長さ l を数回測る.~~ h_1 が約 1 m になるように
- (7) 角度振幅が 6° 以下になるように振り子を振動させ、左右の角度振幅を測る.
- (8) 10 周期ごと 190 周期までの時間を測定する.
- (9) 左右の角度振幅を測る.
- (10) g の計算は (4.8.9) 式に $h_1 = s + l + r$ を代入した次式から求める.

実験の手順(指針からの変更点、等)

- ・ l , s , r の測定では、**0.1 mmのずれ**が重力加速度の 1×10^{-4} の相対的なずれを引き起こすので、慎重に行うこと。
- ・目盛板の角度測定では**目線を最大角度の正面に移動させて**斜めから読まないようにする。
- ・周期の測定では、ストップウォッチを押すタイミングは「振幅の端(最大角度)」ではなく、速度が最大となっている「**最下点(角度 0°)**」で行うこと。
(その方が精度が上がる理由は各自考えてみる)
- ・周期の測定では、測定者は振り子から **1 m程度離れて**、正面から**頭の位置を動かさず**に同じ目線で測定すること。