ボルダの振り子による
重力加速度の測定

[実験テーマの概要]
ボルダ（Borda）の振り子の周期を測定することにより，重力加速度の大きさを求める．これまでの人生で最も精密な実験(相対精度10^{-4}).

予習項目

(1) 都市大周辺での重力加速度の大きさと、調べた文献名を記録せよ。

(2) 単振り子にとりつけた「おもり」についてのニュートンの第2法則の式を調べよ。また、振り子の周期を導出せよ。

(3) 実態振り子の周期の式を調べよ。

重力加速度 $g = 9.8 \ \mathrm{m/s^2}$ は何を意味するか？

林檎を自由落下させる(速さ0で落下させる)と、
1秒後に何メートル落下するか、考えよう。

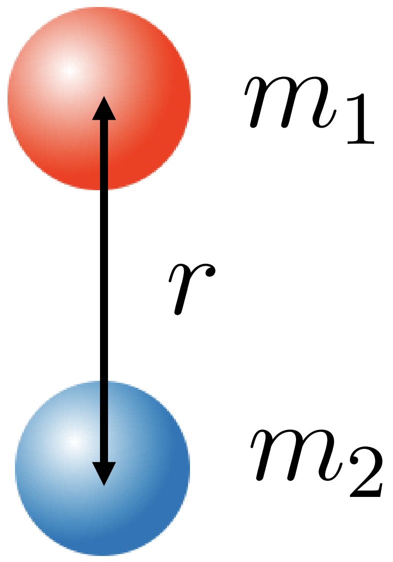
9.8 mではない。加速度の考え方は
速度の変化量を表すので、速さ0で落下した
林檎が1秒後に9.8 m/sの速さになることを
意味している。

$h = \frac{1}{2} g t^2 = 4.9 \ \mathrm{m}$落下するが答えである。

既に学習したように、物体に力Fがはたらくと、
物体に加速度が生じる。一方、ニュートンの万
有引力の法則では、質量m_1とm_2の物体はお
互いに引っ張り合い、その力の大きさは

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

と書ける。



ここでrは物体間の距離である。
また、Gは比例定数で

$$G = 6.67408 \times 10^{-11} \ \mathrm{kg^{-1} m^3 s^{-2}}$$

と実験で求められている。

さて、地球も物体なので、
地球が地表の物体を引っ張る力は

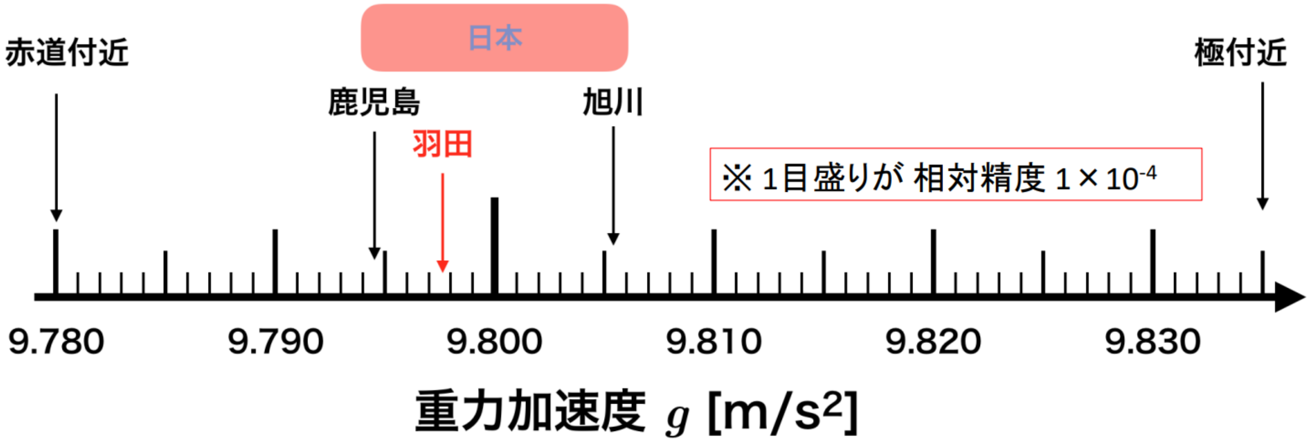
地球の質量　$M_E = 5.9724 \times 10^{24} \ \mathrm{kg}$
地球の半径　$R_E = 6378 \ \mathrm{km}$　を用いると、

$$F = G \frac{m M_E}{R_E^2} = m \left(G \frac{M_E}{R_E^2} \right) = mg$$

と書ける。このとき、重力によって生じる加速
度(すなわち、重力加速度)の大きさは
$g = 9.798 \ \mathrm{m/s^2}$となる。

重力加速度の大きさは地球の半径から計算されるため、標高や緯度によって異なる。
(例えば、赤道付近では$9.780\ \mathrm{m/s^2}$、極付近では$9.832\ \mathrm{m/s^2}$)

そこで物理学実験室では、羽田での実測値 $g = 9.79760\ \mathrm{m/s^2}$ を採用する。



極付近から日本を通過して赤道付近に至る場合の重力加速度の大きさは、上図のようになる。実験値が国内の値であることを確認するためでも、$\Delta g = \pm 0.005\ \mathrm{m/s^2}$ での測定が必要となる。相対不確かさで考えると、

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{0.005}{9.8} = 5 \times 10^{-4}$$

の精度となる。(羽田の実測値から0.005 m/s²よりずれてはいけないという意味ではない。予測からずれても、その結果を報告することが重要です。)

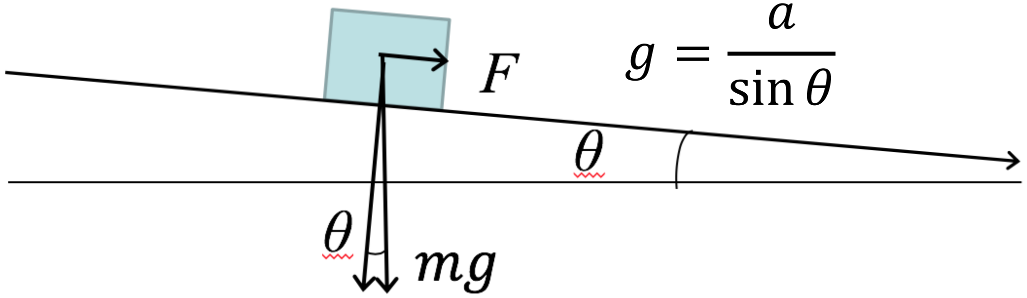
表 7.1　国内各地の重力加速度の実測値　g ($\mathrm{m/s^2}$)

地　名	北　緯		高　さ	g	地　名	北　緯		高　さ	g
旭　川	43	46	113	9.80532	甲　府	35	40	273	9.79706
札　幌	43	04	15	9.80478	鳥　取	35	29	8	9.79791
弘　前	40	35	51	9.80261	名古屋	35	09	46	9.79733
盛　岡	39	42	153	9.80190	京　都	35	02	60	9.79708
秋　田	39	44	28	9.80176	静　岡	34	59	15	9.79742
仙　台	38	15	128	9.80066	伊　丹	34	48	15	9.79704
山　形	38	15	168	9.80015	浜　松	34	43	33	9.79735
新　潟	37	55	3	9.79975	鳥　羽	34	28	15	9.79731
長　岡	37	25	59	9.79931	岡　山	34	40	−1	9.79712
会津若松	37	29	212	9.79913	広　島	34	22	1	9.7959
いわき	36	57	3	9.80009	山　口	34	10	17	9.79659
富　山	36	43	9	9.79868	高　松	34	19	9	9.79699
金　沢	36	33	106	9.79842	松　山	33	51	34	9.79596
前　橋	36	24	111	9.79830	高　知	33	33	−1	9.79626
筑　波	36	06	22	9.79951	福　岡	33	36	31	9.79629
松　本	36	15	611	9.79654	熊　本	32	49	23	9.79552
福　井	36	03	9	9.79838	長　崎	32	44	24	9.79588
羽　田	35	33	−2	9.79760	鹿児島	31	33	5	9.79471

須藤誠一　他:「物理学実験指針」(東京教学社，2020年) P.212.

重力加速度の測定法

私たちは、初回授業(エアートラックの実験)で、
重力加速度の大きさを求めた。

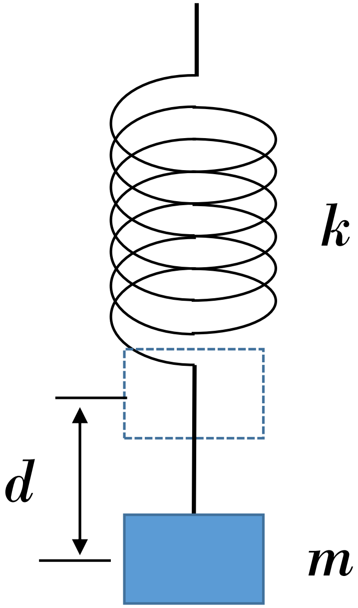


$$g = \frac{a}{\sin\theta}$$

また、質量 m の物体をばね定数 k のバネに吊し、バネの伸びdを測定できれば、

$$mg = kd$$

$$g = \frac{kd}{m}$$



のように、gを求めることができる。

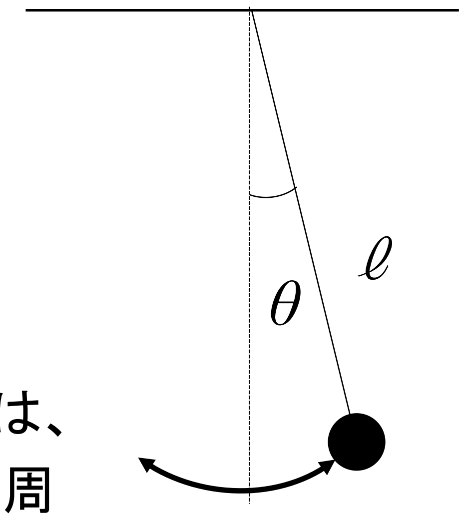
gを4桁($\Delta g = \pm 0.005\ \mathrm{m/s^2}$)得るには、計算に用いる他の物理量も4桁以上の有効数字で測定する必要がある。

しかし、滑走体の通過時刻や、ばねの伸びを有効数字4桁で測定することは簡単ではない。

そこで、振り子を用いた測定法に注目する。大きさの無視できるおもりを、長さlのひもで吊るした振り子(単振り子)の周期Tは、触れ角が十分に小さいと

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}l$$

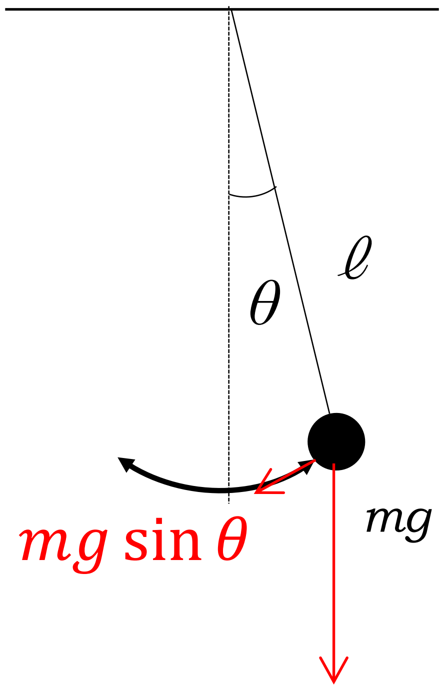


と求められる。この測定法では、ひもの長さを長くすることや、周期運動であることを利用すると、高精度の実験が可能である。

しかし、おもりの大きさや、微小な触れ角の問題を解決する必要がある。

単振り子の周期Tの式の導出

振り子の大きさの問題を解決するために単振り子の周期Tの式の導出する。



質点の運動方程式の接線方向は、おもりに加わる重力の接線方向の作用を用いて、次のように書ける。

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$r = \theta l$と書く。このとき、θが小さければ$\sin\theta \approx \theta$と近似できるので、

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta(t)$$

となる。これは2階微分方程式で、2階微分するとマイナスと係数が出る関数は三角関数 (sin xや cos x)が考えられるので、その一般解は次のようになる。

$$\theta(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

この一般解を微分方程式に戻すと、ωは

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

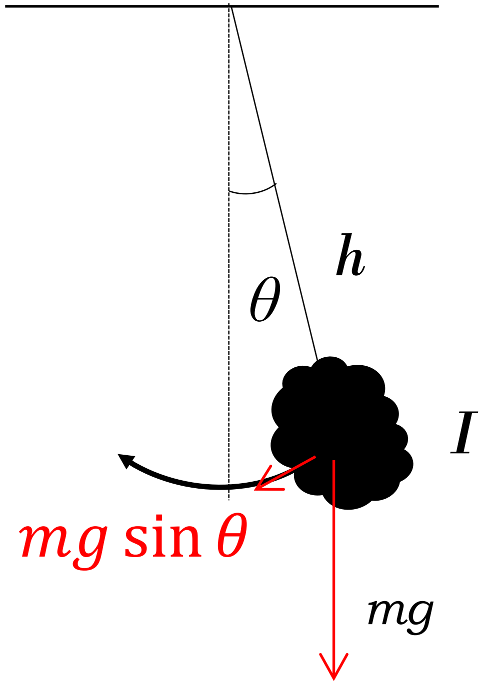
となることが解る。周期は$T = 2\pi/\omega$なので

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

が得られる。

実態振り子の周期の式の導出

大きさのある物体(剛体)をおもりにした振り子(実態振り子)を考える。



質点の運動のしづらさは質量で表すが、剛体の運動のしづらさは慣性モーメントIで表す。回転の中心から剛体の重心までの距離をhとすると、回転についての運動方程式は次のように書ける。

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta\cdot h$$

ここで右辺の「力の大きさと回転半径の積」は、トルクと呼ばれる回転作用を示す。

θが小さければ$\sin\theta \approx \theta$と近似できるので、

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{mgh}{I}\theta(t)$$

となる。これは2階微分方程式で、2階微分するとマイナスと係数が出る関数は三角関数 (sin xや cos x)が考えられるので、その一般解は次のようになる。

$$\theta(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

この一般解を微分方程式に戻すと、ωは

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}$$

となることが解る。周期は$T = 2\pi/\omega$なので

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

が得られる。慣性モーメントは、剛体の形で決まるので、単純な形状の剛体を吊るすほうが良い。