電気回路の測定

[実験テーマの概要]
抵抗だけで作られた回路 (R 回路)、抵抗とコンデンサーを直列に接続した回路 (RC 回路) の特徴を理解する。

予習項目

(1) レジスター、キャパシターとは何か？

(2) オームの法則とは、どのような法則か？

(3) 導体中を電流が流れている。この導体中を流れる電子の伝導速度はどの程度か？計算方法を調べよ。

(4) 抵抗値Rの抵抗と、静電容量Cのキャパシターを直列につなぎ、一定の電圧Vを加えた。キャパシター蓄えられる電荷量の時間変化を調べよ。

抵抗（レジスター）
　電子の移動を妨げる回路の性質（素子）

固定抵抗と呼ばれる回路部品に直流電源，電流計および電圧計を接続し，電源の起電力 V を変えていくと、抵抗に加わる電圧 V と回路を流れる電流 I は比例関係を示す。比例定数を R とすると、次のオーム（Ohm）の法則

$$V = RI$$

が成り立つ。この比例定数 R を、この固定抵抗の抵抗値と呼ぶ.

固定抵抗は電流や単位時間あたりに電流がする仕事(電力)を調整する回路部品でもあり、抵抗値が大きいほど、電流が流れにくい状態と言える。右図のように、その意図に応じた固定抵抗が流通している。

炭素被膜抵抗
絶縁材の周囲に炭素で膜をつけた

金属被膜抵抗
絶縁材の周囲に金属で膜をつけた抵抗で、抵抗値の精度が高い

ガラス抵抗
抵抗体にガラスを用いて、数GΩ～数TΩ を達成させた

セメント抵抗
抵抗体をセメントで埋めた
数ワットの電力に耐える

https://akizukidenshi.com/catalog/c/cregister/

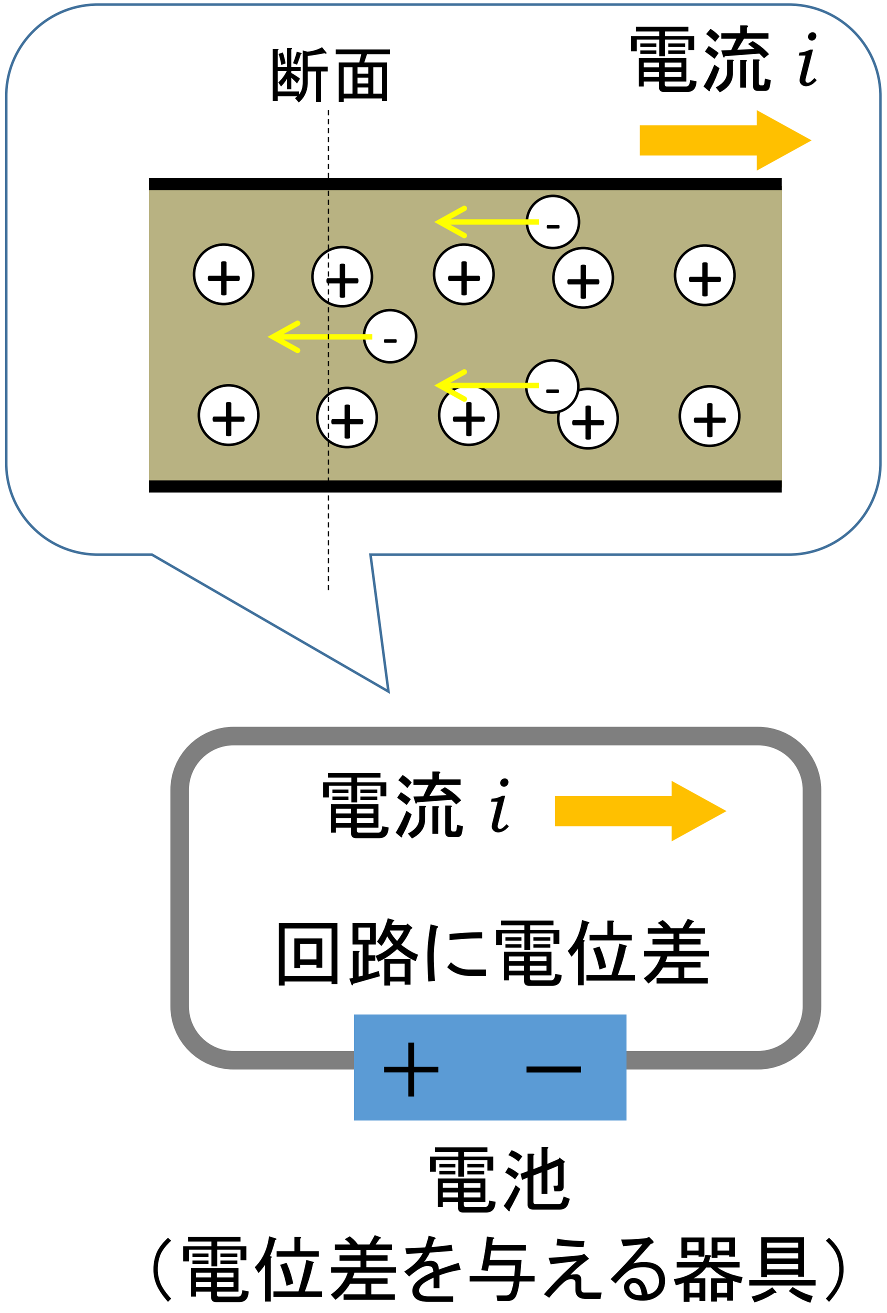
電源とは、回路に電圧(電位差)を与えることで、回路中の電子に仕事を行う装置である。

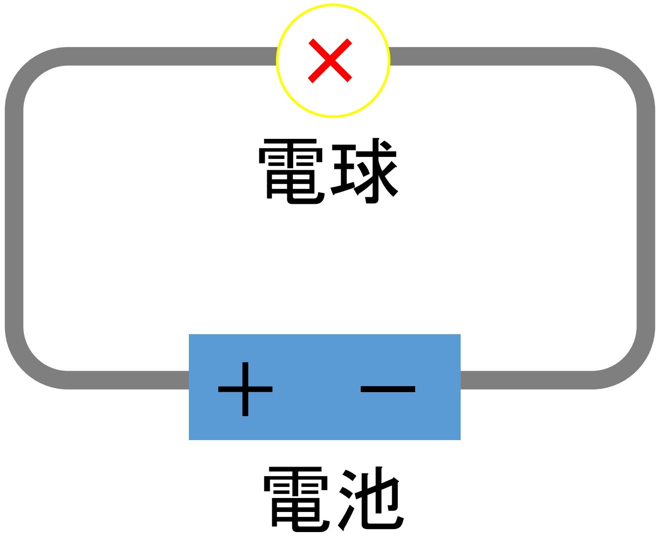
導体中には自由電子があり、電位差によって生じた電場の向きに自由電子は移動する。この電子が移動することを、電流が流れると呼ぶ。

そこで電流を次のように定義する。
ある断面を時間dtの間に電気量dqが通過するとき、

$$i = \frac{dq}{dt}$$

を電流の大きさと定義する。ただし電流の向きは、電子の移動する向きと逆と定義する。





電球に電池をつなぐと、一瞬で電球が点く。
自由電子の流れる速さはどれくらいだろうか？

例えば、真空中で静止した電子に電位差1.0 mVを与える。電位差とは、電気量1 Cあたりに与える電気的なポテンシャルエネルギーのことである。電子の電気量をe [C]とすると、eVが電子に行われた仕事なので、仕事とエネルギーの定理を用いて、

$$eV = \frac{1}{2}mv^2$$

電子の質量m=9.1×10^{-31} kgと電気量e=1.6×10^{-19} Cを用いると

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2\times(1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C})\times0.0010\mathrm{V}}{9.1\times10^{-31}\ \mathrm{kg}}}$$

$$= 1.9\times10^4 \mathrm{m/s}$$

銅線内を流れる電子の速さを計算しよう。
簡単に考えるために、直径d=2.0 mm、長さl=10 mの銅線にV=1.0 mVの直流電源をつないだとしよう。まず、どの程度の電流かを考える。

抵抗値は、銅線の断面積Aと電気抵抗率ρを用いて、$R = \rho \frac{l}{A}$と書ける。銅の電気抵抗率ρ[Ω･m]は1.68×10^{-8} Ω･mなので、電流は次のように求められる。

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{VA}{\rho l} =$$

次に、体積あたりの電子の数（数密度）nを求めよう。銅は、原子1個につき、自由電子が1個あるとして、銅原子の数nを求める。

$$n = \frac{原子数}{単位体積} = \frac{原子数}{モル}\frac{モル}{質量}\frac{質量}{単位体積}$$

$$= アボガドロ数 \times 分子量 \times 密度$$

銅の物性値である分子量 M = 63.54、密度 ρ = 8.960 g/cm^{3}を用いると、自由電子の数密度は次のように求められる。

$$n =$$

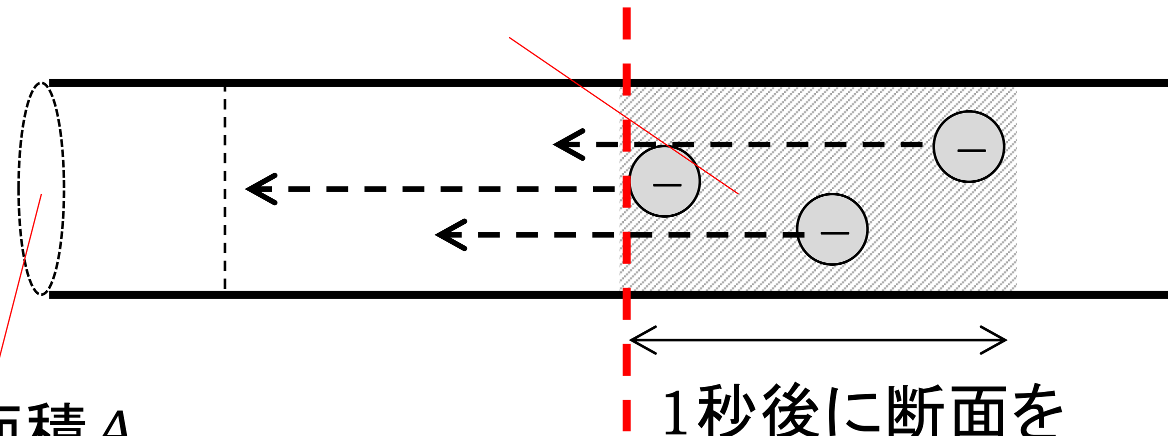
電流値を求めるために、1秒間で断面を通過する電荷量qを求める。このとき、電気量は通過する電子の数と、電子1個の電気量の積である。

$$q = e\,N$$

ここでNは1秒間で断面を通過することができる領域にある電子数なので、

$$N = n\,(A\,x)$$

伝導電子の数密度 n



ここでx [m]は断面からの距離で、断面からx [m] 内の電子1秒後に断面を通過できるが、単位時間当たりの距離を電子の移動速度vと考えて良い。

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\big(en\,(Ax)\big) = enA\frac{dx}{dt} = enAv$$

従って、電位差を与えた銅線内の電子の移動速度は次のように求められた。

$$v = \frac{i}{enA} =$$

$$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{2.0\times10^{-3}\ \mathrm{m}}{2}\right)^2 = 3.1\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2$$

$$R = \rho\frac{l}{A} = 1.68\times10^{-8}\ \Omega\cdot\mathrm{m}\times\frac{10\ \mathrm{m}}{3.1\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2} = 0.0535\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{1.0\times10^{-3}\ \mathrm{V}}{0.0535\ \Omega} = 0.0187\ \mathrm{A}$$

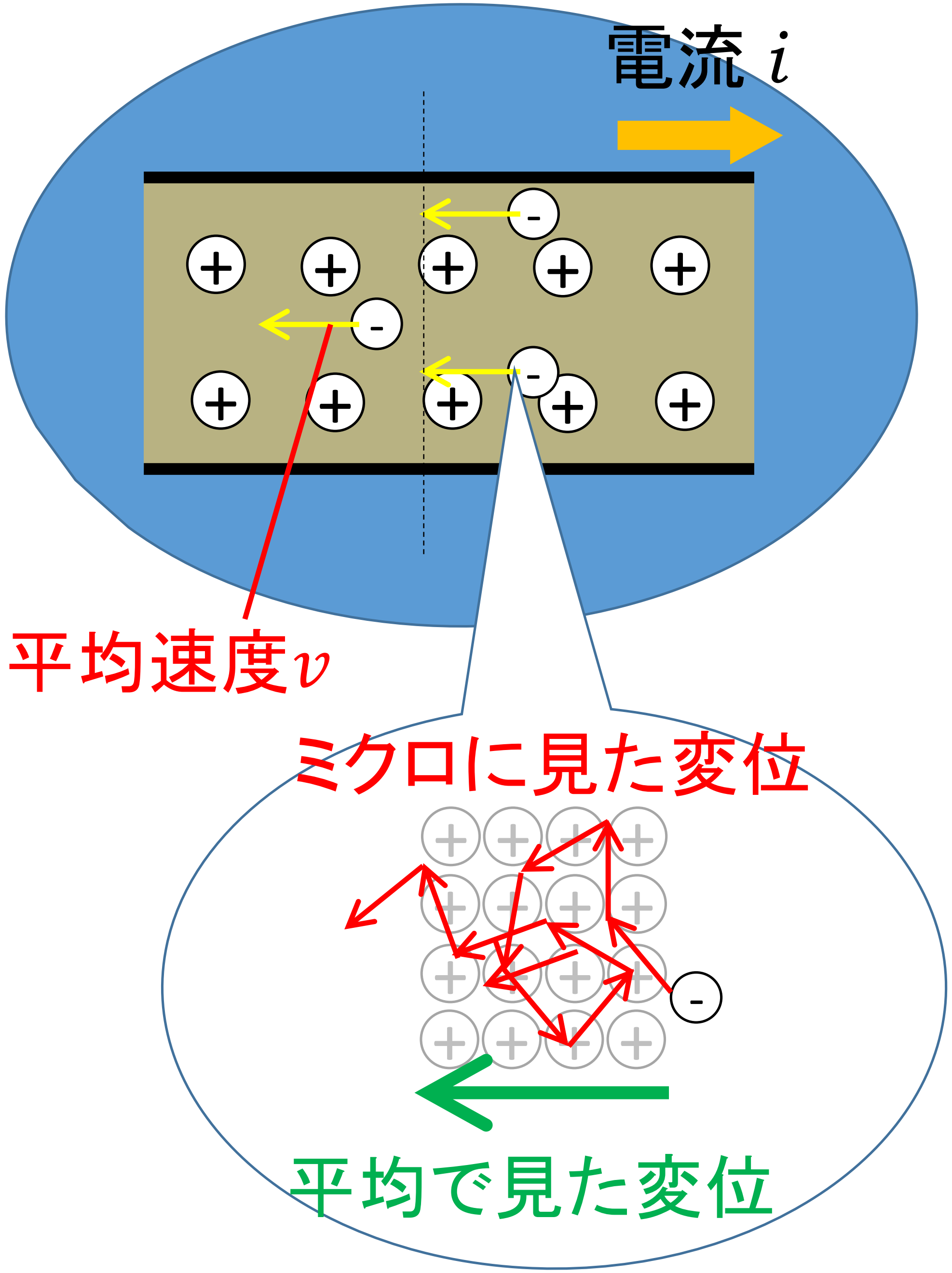
$$n = 6.02\times10^{23}/\mathrm{mol}\ \times\frac{1}{63.54\times10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}}\times8960\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$= 8.49\times10^{28}\ /\mathrm{m}^3$$

$$v = \frac{i}{enA} = \frac{0.0187\times10^{-3}\ \mathrm{A}}{1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}\times8.49\times10^{28}/\mathrm{m}^3\times3.1\times10^{-6}\ \mathrm{m}^2}$$

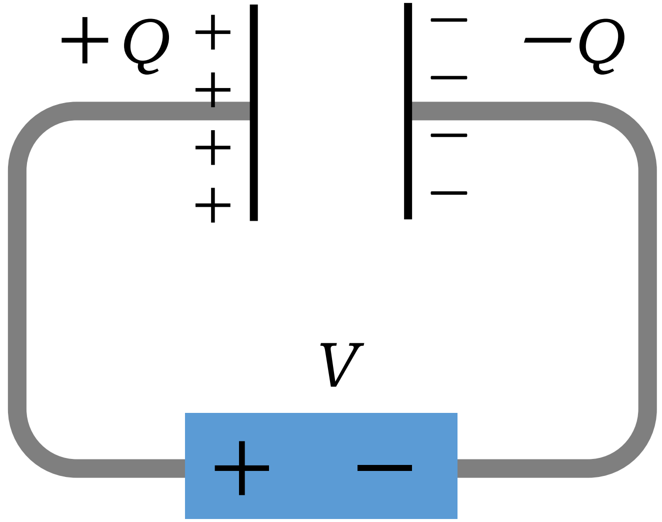
$$= 4.4\times10^{-7}\ \mathrm{m/s} = 0.44\ \mathrm{\mu m/s}$$

実際の電子の運動は、金属イオンとランダムな衝突を行いながらドリフトしていく(流れていく)ため、速度は極めて遅い。



キャパシター(コンデンサ)

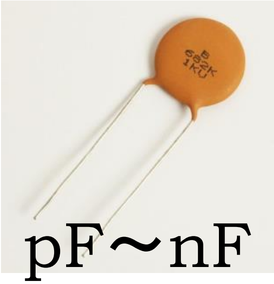
内部に電荷(もしくは電気エネルギー)を蓄える回路部品



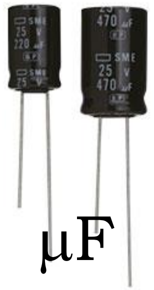
電子を貯まるための2枚の金属板から構成されている。キャパシターに電位差Vを与えると、貯まる電荷量Qは電位差に比例する。

$$Q = CV$$

この比例係数Cは電気容量(キャパシタンス) と呼ばれる性能値である。右図のように、容量に応じたキャパシターが流通している。



セラミックコンデンサ:
酸化チタン系物質を極板内部に充填した

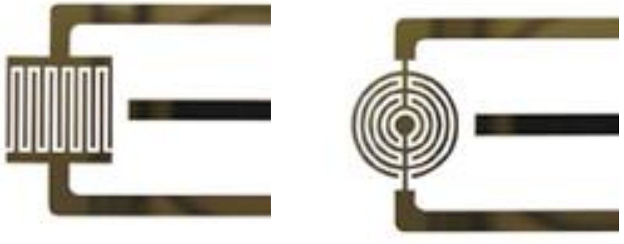


電解コンデンサ:
極板に酸化アルミニウムを形成させた

極性がある

mF～F

電気二重層コンデンサ:
電気二重層(界面現象)を利用して、電荷を蓄える



蒸着基板コンデンサ:
基板に導体を蒸着させたコンデンサ

https://akizukidenshi.com/catalog/c/cregister/

現実的に、キャパシタと電源を導線でつないだ回路を考えよう。導線にも数Ω程度の抵抗値がある。このため、キャパシターのみと考えている回路も、現実的にはRC回路である。そこで、回路の抵抗値が一か所に集中している回路と考えよう。

右図の回路で、スイッチをオンにすると、回路に電位差が与えられ、回路に電子の移動が起こる。このとき、抵抗とキャパシタ―の電位差は、

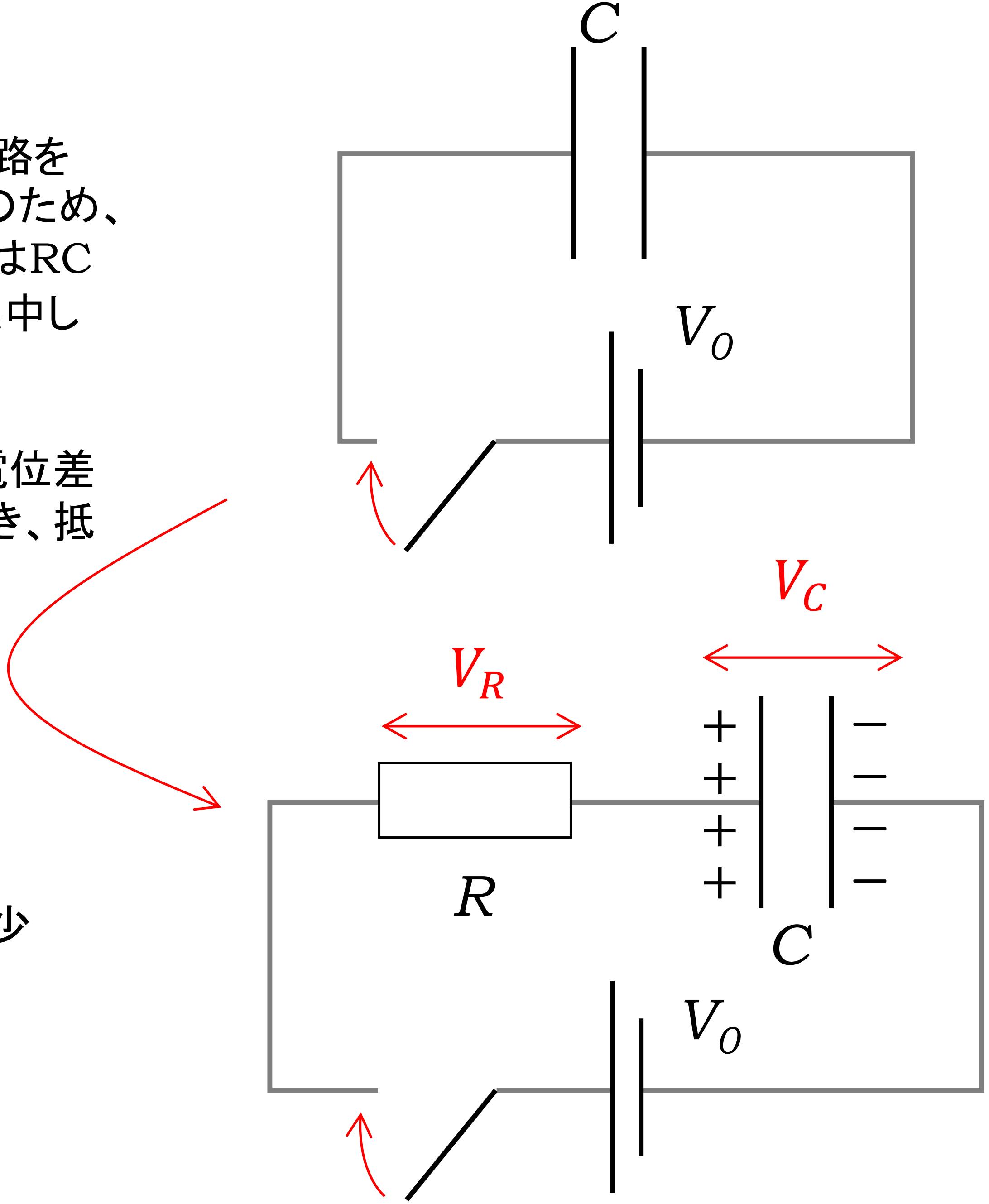
抵抗：$V_R = iR = R\frac{dq}{dt}$

キャパシター：$V_C = \frac{q}{C}$

なので、電源の起電力V_0 ＝ 回路の電位の減少（キルヒホッフの法則の第2法則）より

$$V_0 = iR + \frac{q}{C}$$

という方程式が成り立つ。



$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V_0$ で初期条件 $q(t=0)=0$ に対する微分方程式の解は（解法は指針P.70-71を参考に）、

$$q=CV_0\left\{1-e^{-\frac{t}{RC}}\right\}$$

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}\left[CV_0\left\{1-e^{-\frac{t}{RC}}\right\}\right]$$
$$=CV_0\times\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}}=\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

このとき、抵抗とキャパシタ―の電位差は、

抵抗：$V_R=iR=V_0e^{-\frac{t}{RC}}$

キャパシター：$V_C=\frac{q}{C}=V_0\left\{1-e^{-\frac{t}{RC}}\right\}$

となり、この和が方程式の右辺 V_0 と一致する。

ところで、抵抗とキャパシタ―の電位差の時間変化を測定した場合、そのグラフがexp関数になっているかを確認するにはどうしたらよいだろうか？

$V_C=V_0\left\{1-e^{-\frac{t}{RC}}\right\}$ より

$$V_0-V_C=V_0-V_0\left\{1-e^{-\frac{t}{RC}}\right\}=V_0e^{-\frac{t}{RC}}$$

両辺の対数をとると($\log_e$ を $\ln$ と書く)、

$$\ln(V_0-V_C)=\ln V_0e^{-\frac{t}{RC}}=\ln e^{-\frac{t}{RC}}+\ln V_0$$
$$=-\frac{t}{RC}\ln e+\ln V_0=-\frac{1}{RC}t+\ln V_0$$

(V_0-V_C) の対数は、t の一次関数で傾きは $-\frac{1}{RC}$ となる。