モノコードを用いた定常波の観測

[実験テーマの概要]
金属線に発生させた定常波の性質を理解する

予習項目

(1) 定常波とは何か？特徴や、発生する条件を調べよ。

(2) 弦を進む波の進行速度は、どのように書けるか？

(3) 体積密度が$\rho = 8.45\ \mathrm{g/cm^3}$で、直径が$0.30\ \mathrm{mm}$の真鍮線の線密度を求めよ

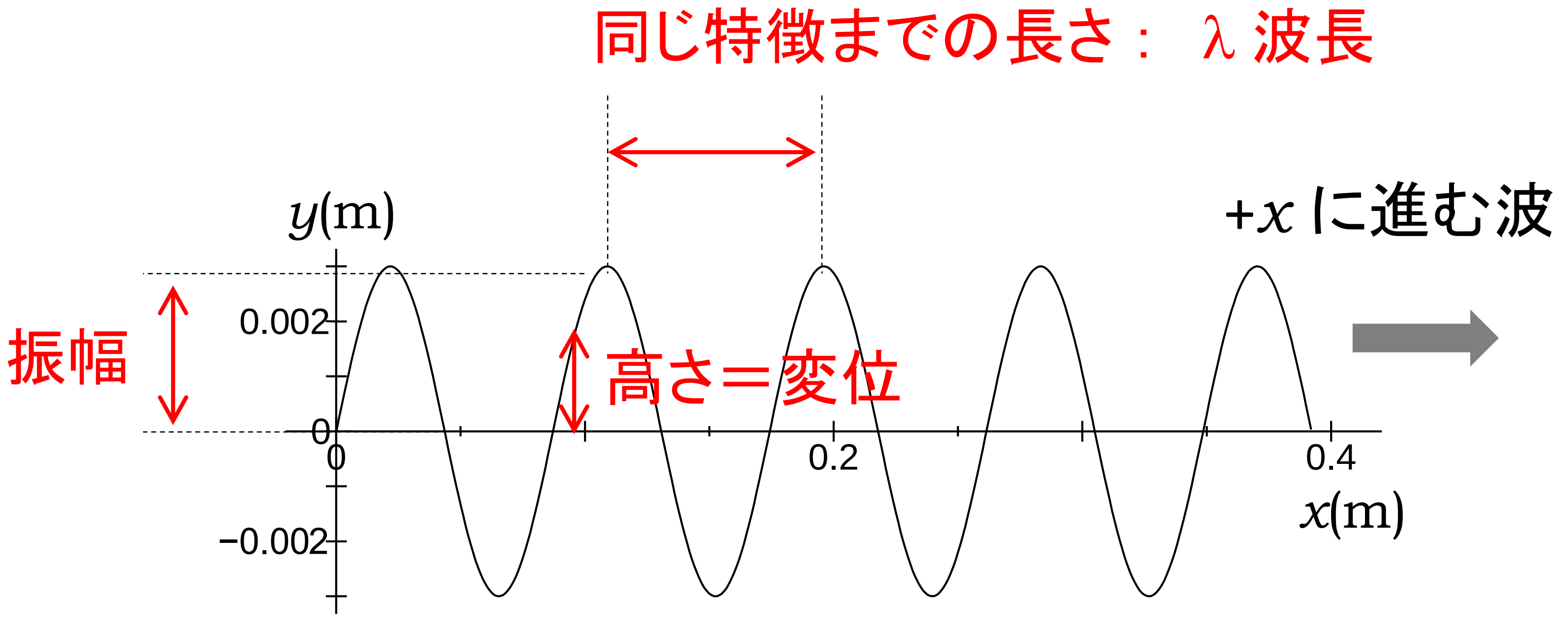
波とは？

波とは、空間や物質内部を、変化が次々と隣に伝わっていく現象のことである。x軸を正の向きに進んでいる波がある。この波をある時刻に観測した波形が図のようだとすると、波の変位の最大値が観測される位置は、次の時刻に右(x軸を正の向き)に移動する。

物理量 y の変化(ここでは波の変位y [m]としよう)が$+x$ の方向に進むとき、この変位を三角関数を用いて、次のように表す。

$$y = A\sin(kx - \omega t)$$

ここでAは振幅、kは波数、ωは角振動数を示す。この関数では位置x [m]と時刻t [s]が決まらないと、変位（波の高さ）が求まらない。



このとき、変位の最大値を振幅と呼ぶ。また、同じ波形が現れる距離(変位が最大から次の最大となるまでの距離)を波長λと呼ぶ.

また、$f = \omega/2\pi$で得られる量を振動数、$T = 1/f$で得られる量を周期と呼ぶ。周期は同じ波形が現れるまでの時間を示している。

波の式 $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ の位相中の符号を考えよう。右図の青線が時刻t_0で観測された波で変位の最大値の観測される位置をx_0とする。t_0 $+\Delta t$に観測したところ、観測していた変位の最大値の位置はx_0 $+\Delta x$ に移動した。波の式は

$$y(x,t) = A\sin\{kx_0 - \omega t_0\}$$
$$y(x,t) = A\sin\{k(x_0 + \Delta x) - \omega(t_0 + \Delta t)\}$$

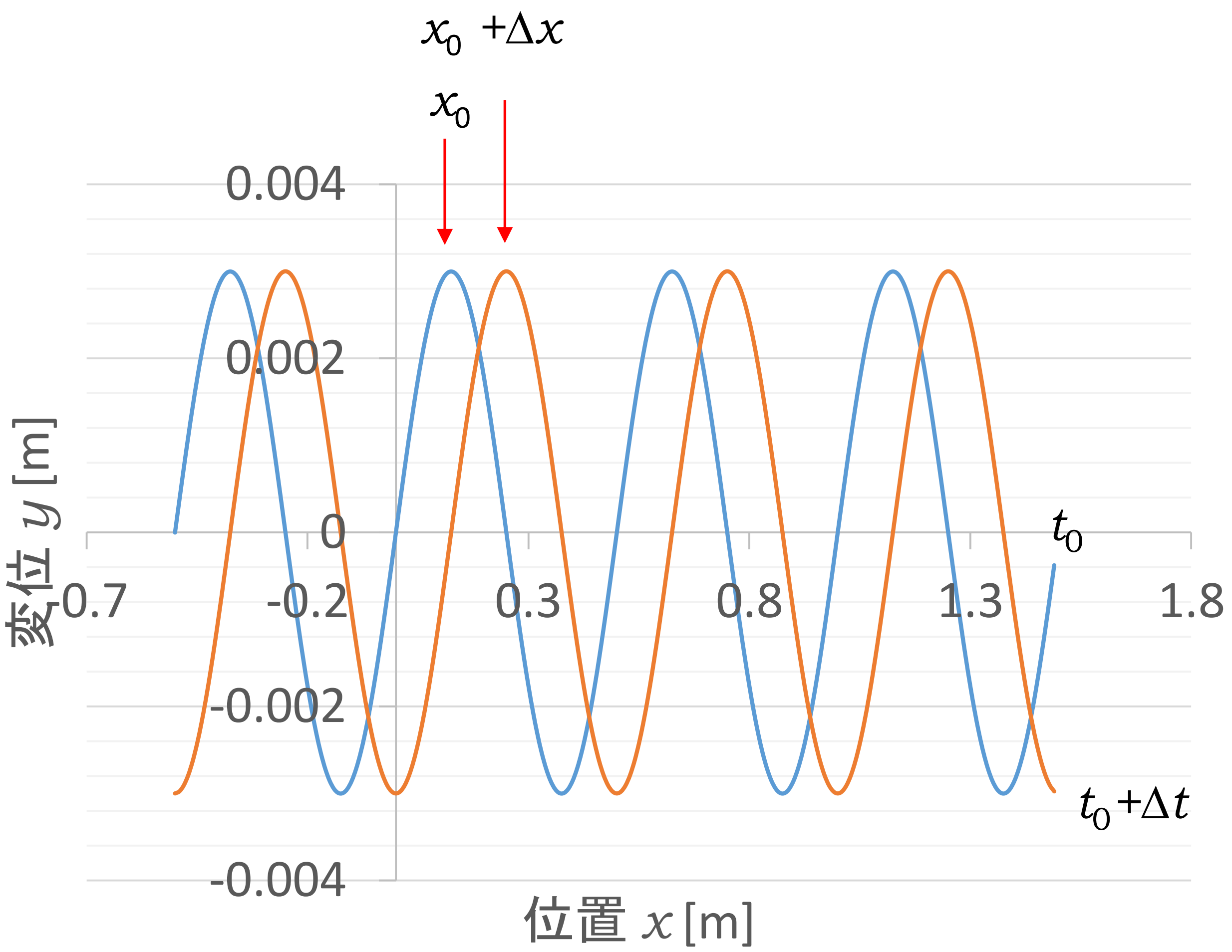
となる。このとき、両式の位相は$\pi/2$となので、

$$k(x_0 + \Delta x) - \omega(t_0 + \Delta t) = kx_0 - \omega t_0$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

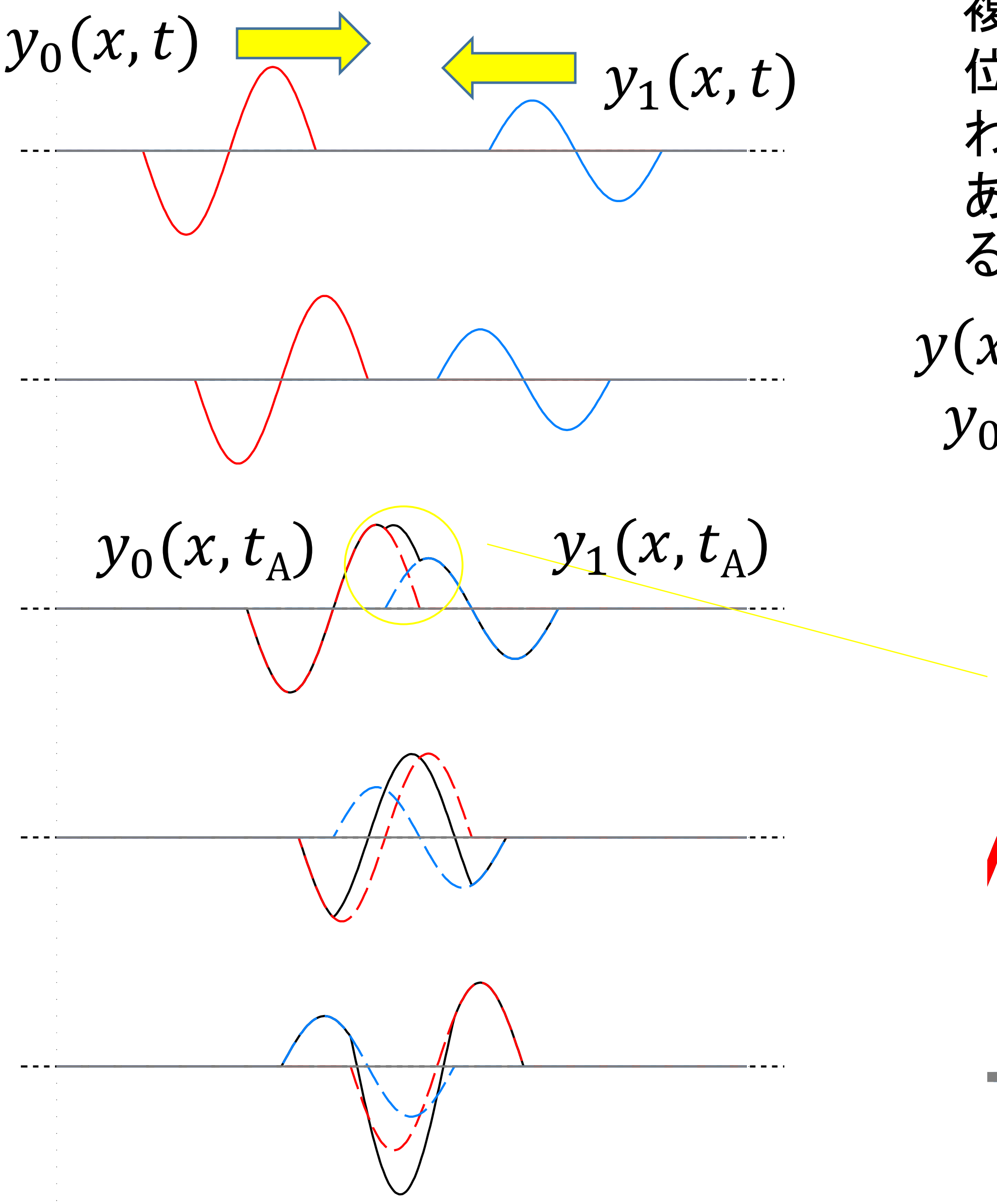
となる。Δtをゼロに近づけると、$v = \omega/k$となる。
また、波の式が $y(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$の場合、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\omega}{k}$$

となる。従って、位相中の符号で進行方向が決まる。

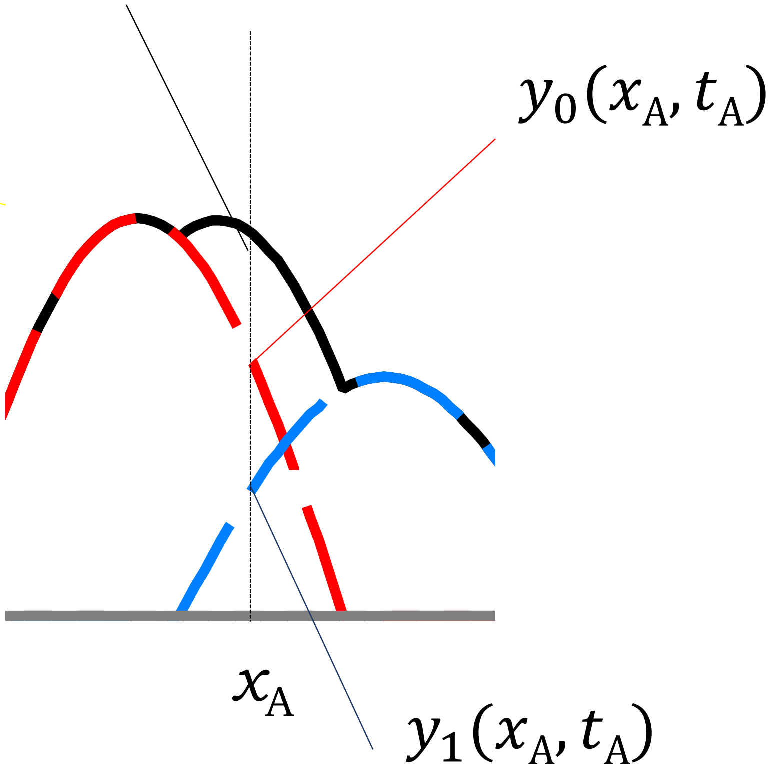


波の重ね合わせ



複数の波が存在する場合、観測される波の変位はそれぞれの波の変位の和（波の重ね合わせ）となる。この現象は、弦を伝わる波であっても、空間を広がっていく波でも成立する。

$$y(x_\mathrm{A},t_\mathrm{A}) = y_0(x_\mathrm{A},t_\mathrm{A}) + y_1(x_\mathrm{A},t_\mathrm{A})$$



変数は同じで反対向きに進む波の重ね合わせがx軸上を進んでいるとしよう。

$$y_0(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$
$$y_1(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$

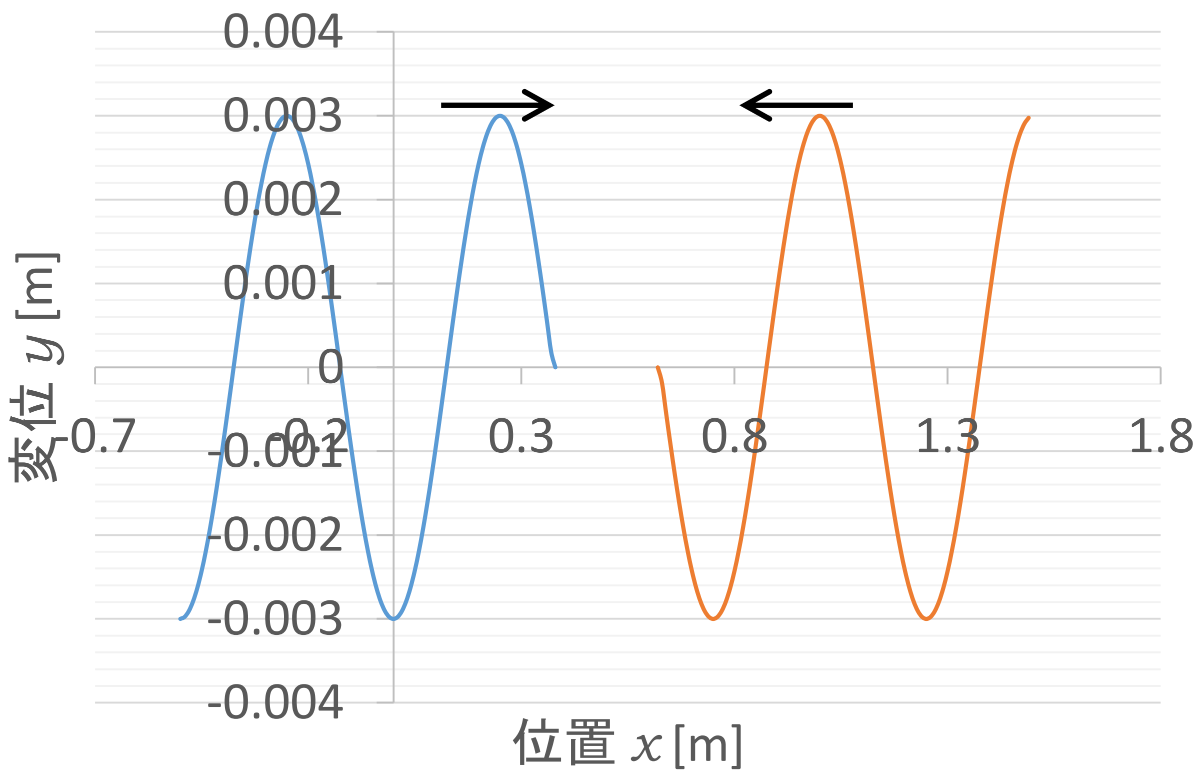
これらの波の重ね合わせは次のよう

$$\begin{array}{rl} & y_0(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \\ + & y_1(x,t) = A\sin(kx + \omega t) \\ \hline \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$y(x,t) = 2A\sin kx\cos(\omega t)$$

$$\begin{array}{rl} & \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \\ + & \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B \\ \hline & 2\sin A\cos B \end{array}$$



$y(x,t) = 2A\sin kx\cos(\omega t)$ の波が観測される

$y(x,t) = 2A \sin kx \cos(\omega t)$ の特徴を考えよう。

$$y(x,t) = 2A \sin kx \cos(\omega t)$$

$\sin kx$ の項は$\sin\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{2}$, ・・・で最大となるので、

$x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ (ただしnは0,1,2・・・)

の位置で最大(腹)となる。$\sin\frac{0\pi}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{2}$, $\sin\frac{4\pi}{2}$, ・・・で、常にゼロとなるので、

$$x = n\frac{\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2}$$

の位置で常にゼロ(節)となる。

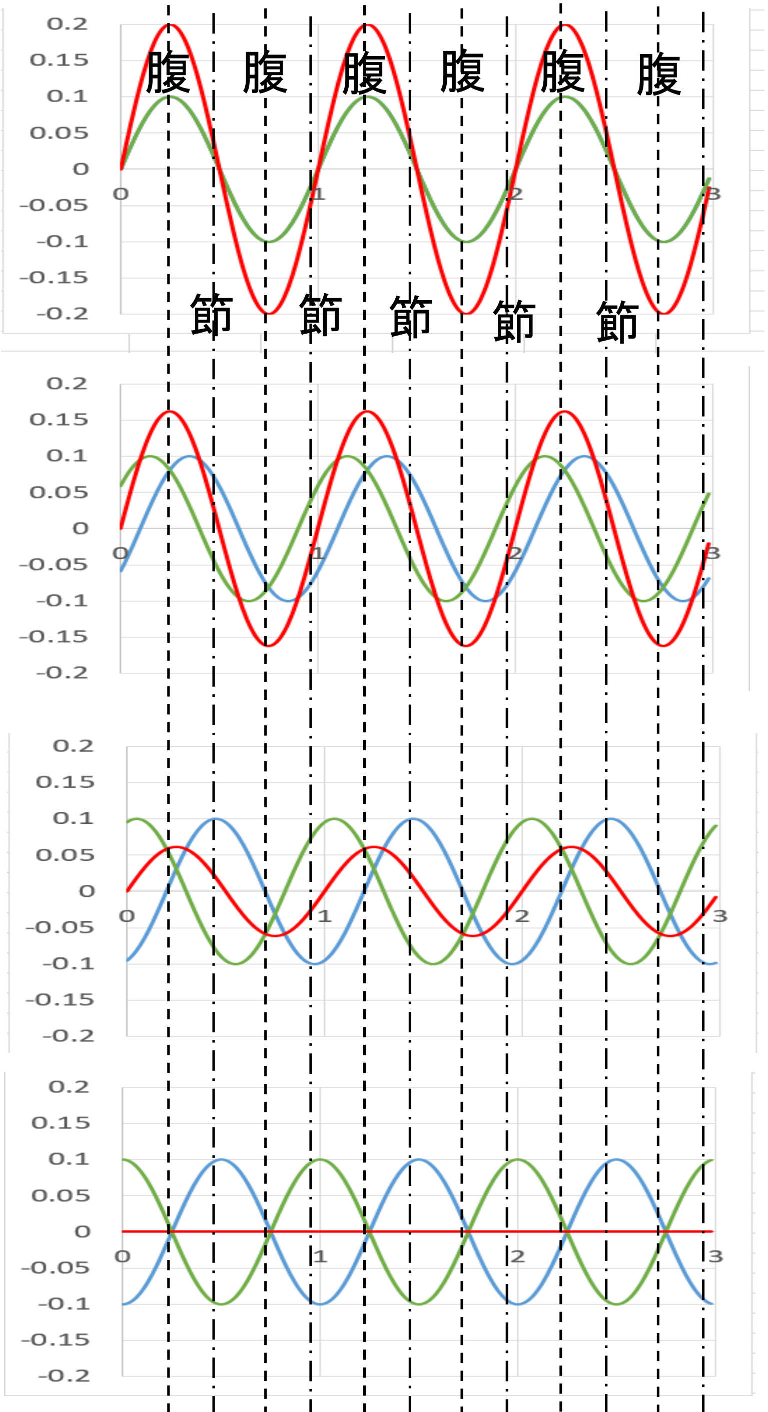
等間隔に変位しない点(節)と、周期的に振幅が倍となる点(腹)がある性質を持つこの波を定常波と呼ぶ。

$t = 0$

$t = 0.15\,T$

$t = 0.2\,T$

$t = 0.25\,T$



次に、長さがl弦の両端を固定して、弦に波を発生させる。

$$y(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$$

この波が、固定されている弦の端に到達すると、波は反射される。このとき、反射された波は

$$y(x,t) = -A\sin(kx+\omega t)$$

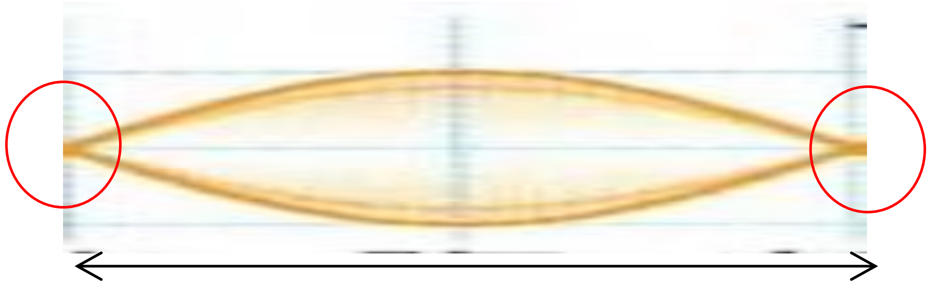
が生じる。このとき、両式の重ね合わせた波が観測される。もし、重ね合わされた波が定常波となるなら、固定されている弦の端は固定端に位置にならなければならない。

つまり、図のように、弦の長さlが

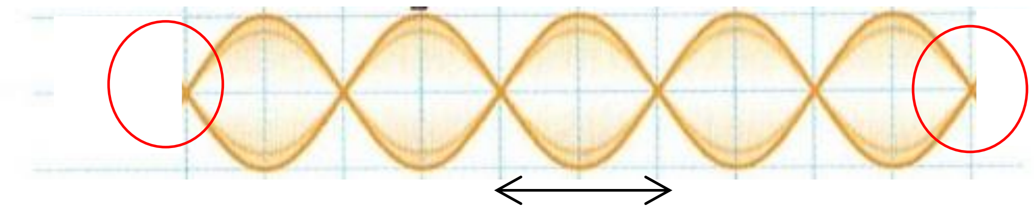
$$l = \frac{\lambda}{2}\times\text{整数}\ n\ \text{倍}$$

となる必要がある。

弦の長さ l



$\lambda/2$



$\lambda/2$

モノコード（弦）を用いた定常波の観測

弦の特徴は線密度で表す。金属でできた弦を張り、弦に波を生じさせる。物質の性質を表す量の一つに体積密度がある。体積密度ρは、物体の質量をm、体積をVとすると、

$$\rho = \frac{M}{V}$$

と書ける。一方、断面積が十分に細い弦では、その性質を表す量として、線密度σを用いる。

$$\sigma = \frac{M}{l}$$

ここで、l は弦の長さを示す。

問　体積密度がρ = 8.45 g/cm^3 で、直径が0.30 mmの真鍮線の線密度を求めよ。

問　体積密度がρ = 8.45 g/cm³ で、直径が
0.30 mmの真鍮線の線密度σを求めよ。

$\rho = 8.45\ \mathrm{g/cm^3} = 8.45 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$

真鍮線の質量をM、長さをl、断面積をAとすると

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{lA} = \frac{\sigma}{A}$$

と書ける。真鍮線の直径をdとすれば、

$$\sigma = \rho \times A = \rho \times \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$
$$= 8.45 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \times \pi$$
$$\times \left(\frac{0.30 \times 10{-}3\ \mathrm{m}}{2}\right)^2$$
$$= 5.97 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg/m}$$