直接測定と不確かさ
3.2 不確かさ

予習項目

物理学実験指針の該当ページをよく読みなさい。

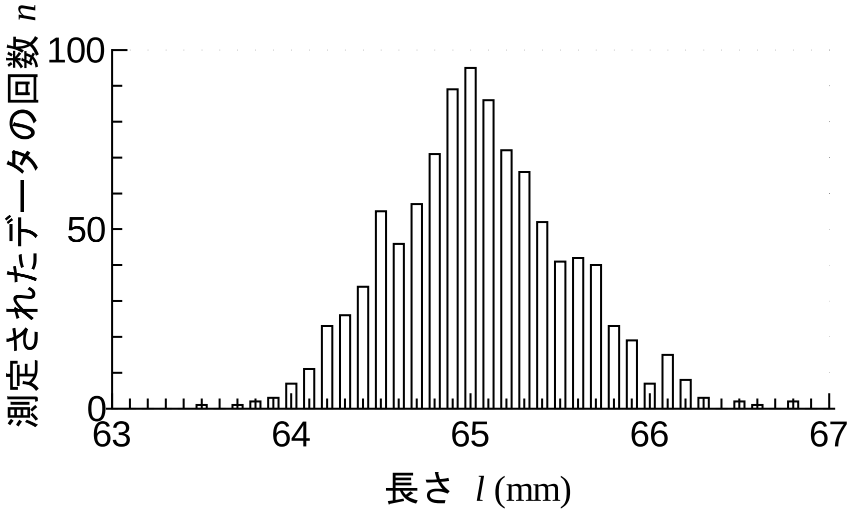
(1) 標本平均、タイプAの不確かさ、タイプBの不確かさ、合成標準不確かさ、相対不確かさとは、何を表す量なのか？どのように求めれば(計算すれば)よいか？をノートにまとめなさい。

＊指針中では、正規分布の説明の中で，一般的な統計学の用語である母平均，標準偏差を紹介している。これらは無限回の測定を行ったときの測定値全体の集合（母集団）に関する量である。一方で、実際の実験では有限回の測定であるから，その測定値全体の集合は母集団ではない。この実際の測定値の集合を標本と呼び、標本平均，標本標準偏差を考える必要がある。

そこでまずは指針を読み、その後、本スライド資料を読んで、解答を作成しなさい。

ある金属棒の長さを分解能0.1 mmの定規で、繰り返し1000回測定し、

65.3 mmと測定された回数 50
65.4 mmと測定された回数 43
・・・と統計結果をグラフにする。



このグラフの特徴は、

- 頻度の分布は左右対称
- 平均値からのわずかなずれは高い頻度
- 非常に大きなずれは低い頻度

この頻度グラフは、ガウス分布関数と呼ばれる関数の特徴と一致する

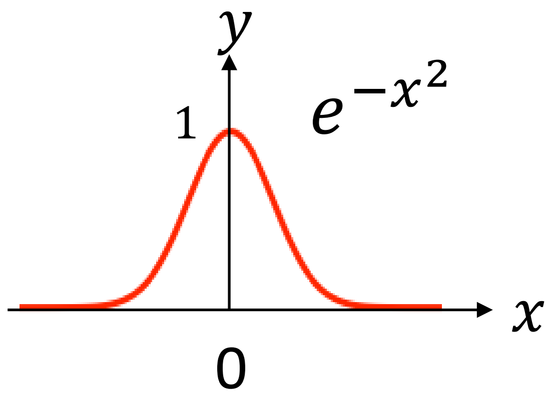
ガウス分布関数

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

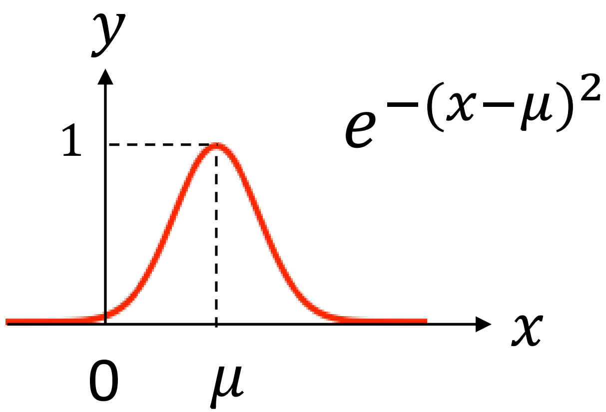
ここで、$\exp[X]$はe^X を示している。
この関数のμ (ミュー)とσ (シグマ)が分かれば、測定結果の分布の中心やばらつきが理解できる。

ガウス関数の特徴

①基本となる関数 e^{-x^2}

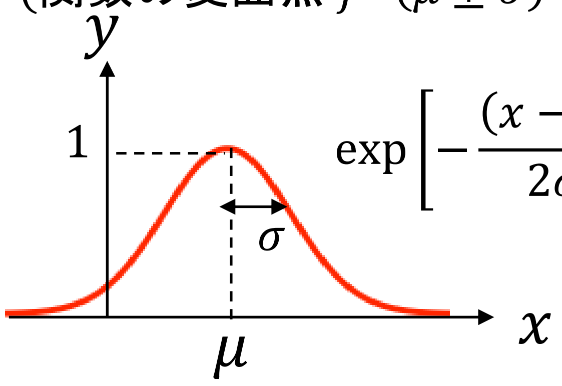


②平行移動 (中心値をμに移動)



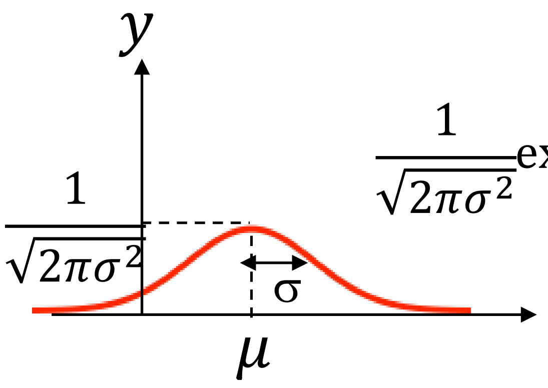
③分布の広さ(ばらつきの大きさ: σ)

(関数の変曲点 $f''(\mu \pm \sigma) = 0$)



$$\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

④確率と考えるため、面積を1にする(1/$\sqrt{2\pi\sigma^2}$で割る)



$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

平均値 $\mu = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}$

標準偏差 $\sigma = \sqrt{\dfrac{\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}}$

ガウス分布関数

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

測定値の特徴（分布）を表すパラメーター μとσ
を測定値x_1, x_2,・・・, x_nから推定する。
標本平均 は次のように計算できる。

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

標本平均$\bar{x}$ は、ガウス分布関数の平均値 μ の**最良推定値** と考える。

また、標本平均 $\bar{x}$ からのずれ（残差）

$$v_i=x_i-\bar{x}\quad(i=1,\ldots,n)$$

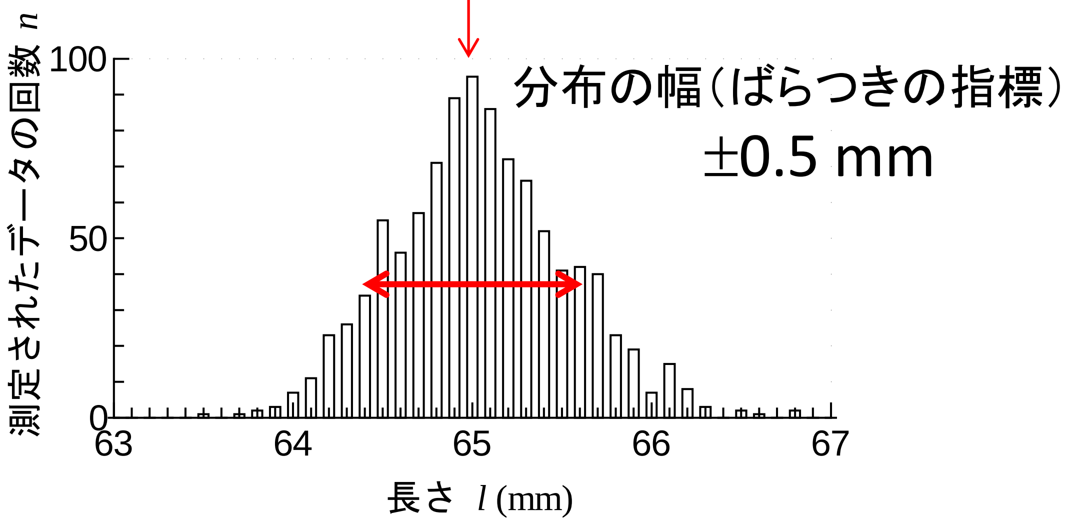
から得られる実験標準偏差(**標本標準偏差**)

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum v_i{}^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}$$

はガウス分布関数の標準偏差σの**最良推定値**と考える。

$\bar{x}=65.0$ mm
$\sigma_x=0.5$ mm

$\bar{x}=65.0$ mm



データ数nが大きいと、測定値は$\bar{x}\pm\sigma_x$ の範囲に確率68.3%で入る（±2σとすると、全体の95.4%が入る）。

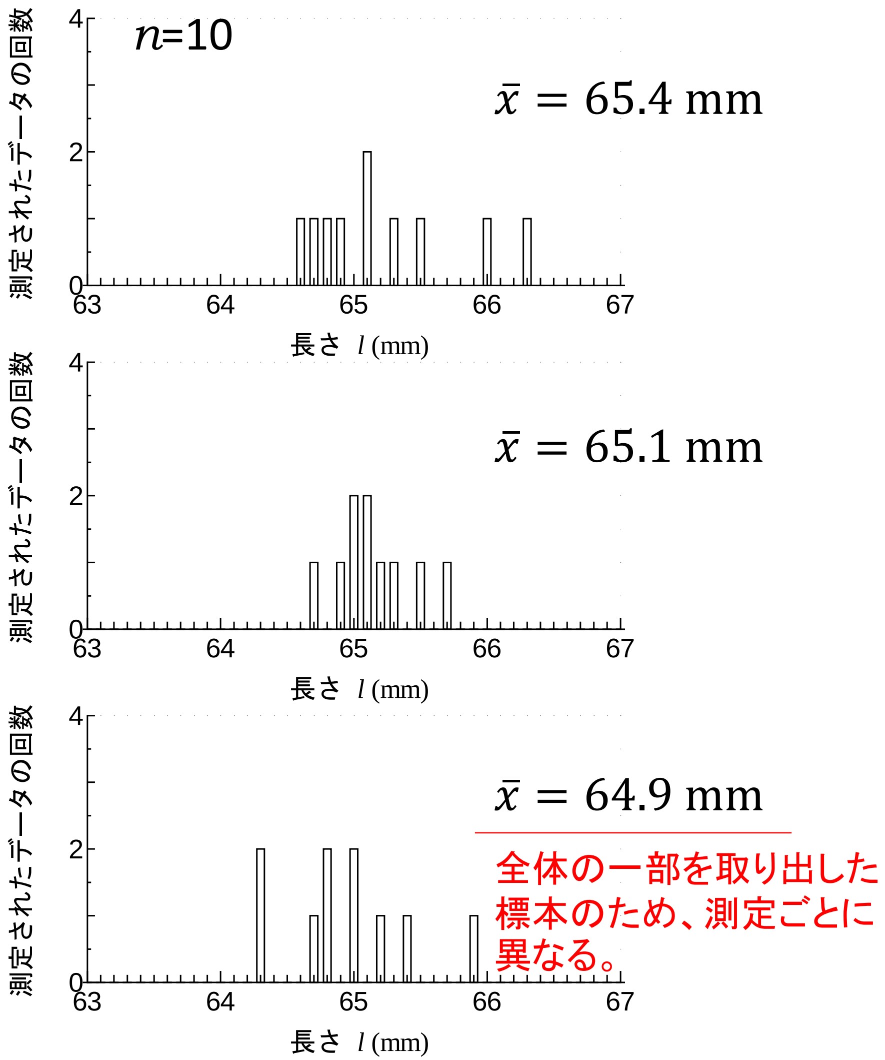
ここでデータ数 $n = 1000$, または$n = 10$ の測定を繰返した場合を考えよう。$n = 1000$の測定を繰り返した場合、毎回、$\bar{x} = 65.4$ mmとなる。つまり、データ数が多いと標本平均は一定となる。

一方、$n = 10$ の測定を繰り返した場合、右図のように、標本平均がばらつく。

常に1000回も測定できるとは限らない。そこで平均値のばらつき

$$\delta x_{\mathrm{A}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

を**タイプAの不確かさ(標準不確かさ) δx_{A}**と呼ぶことにする。



つまりδx_{A}は、「平均値のばらつきを表す指標」である。測定回数を増やすとσ_xは一定値に近づくのに対し、δx_{A}はいくらでも小さくなる。

ところで、平均値のばらつきは、測定器具の分解能等の統計的解析以外の手段にも関係する。そこで、これらをタイプBの不確かさδx_{B}と呼ぶことにする。

この不確かさには、製造業者の仕様や、校正証明書、アナログ・デジタル表示の違い等を確認する必要があるが、本物理学実験では、簡略化するために、**分解能のみ**とする。

最終結果には、**タイプAの不確かさ**と**タイプBの不確かさ**の両方が関係するので、タイプAとタイプBの不確かを合成したものを、合成標準不確かさと呼ぶことにする。

合成標準不確かさは、2つの不確かさを2乗和の平方根で合成する。

$$\delta x_{\mathrm{C}} = \sqrt{(\delta x_{\mathrm{A}})^2 + (\delta x_{\mathrm{B}})^2}$$

つまり、δx_{C}は、「ある実験器具を用いて繰り返し測定を行って得られた測定値の平均のばらつきの指標」である。

また δx_{C}を標本平均で割った $\frac{\delta x_{\mathrm{C}}}{\bar{x}}$ を相対不確かさ(精度)と呼ぶ。平均値に対するそのばらつきの指標なので、測定値の信頼性を表す指標と考える。