モノコードを用いた定常波の観測

[実験テーマの概要]
金属線に発生させた定常波の性質を理解する

張力Tで張られた線密度σの弦に定常波が観測された。弦の運動を考えるために、質量Δmの微小部分に注目する。

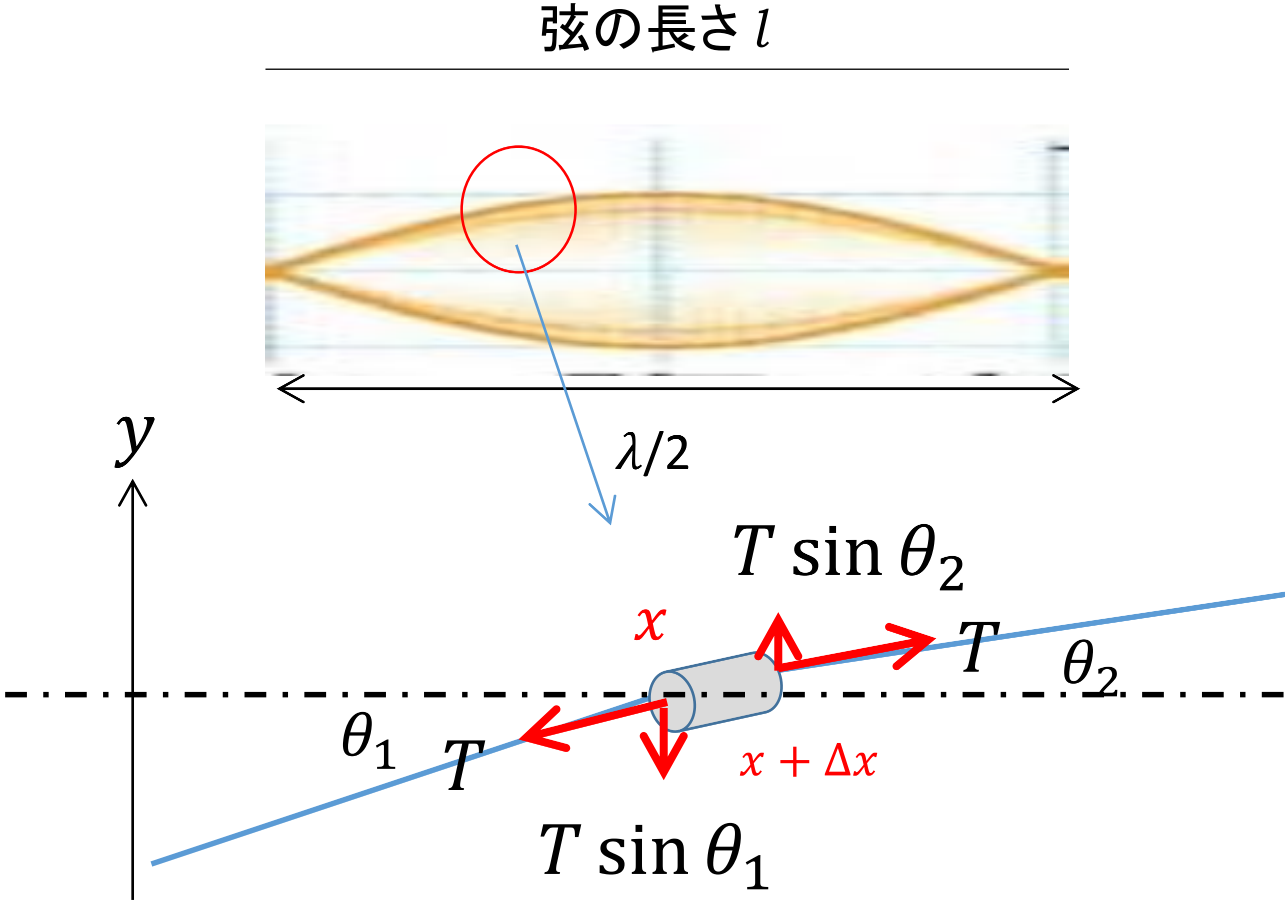
この部分の両端(位置xと$x+\Delta x$)には張力が作用しており、上下に運動する。垂直な向きの運動方程式 $ma=F$ は次のように書ける。

$$\Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\ \sin\theta_2 - T\sin\theta_1$$

$$= T\ \tan\theta_2 - T\tan\theta_1$$

$$= T\frac{\Delta y(x+\Delta x)}{\Delta x} - T\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}$$

ここでθが微小なので、$\sin\theta = \tan\theta$を用いた。また、$\frac{\Delta y(x+\Delta x)}{\Delta x}$は$x+\Delta x$での傾き、$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}$は$x$での傾きを表す。



$$\Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\Delta y(x+\Delta x)}{\Delta x} - T\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}$$

ここで、$\frac{\Delta y(x+\Delta x)}{\Delta x}$は$x+\Delta x$での傾き、$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}$は$x$での傾きのため微小量で、その差は、$a(x+\Delta x) - a(x) = \frac{da}{dx}\Delta x$と書けるので、(くわしくは、間接測定の不確かさをもう一度見ること)

$$T\frac{\Delta y(x+\Delta x)}{\Delta x} - T\frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

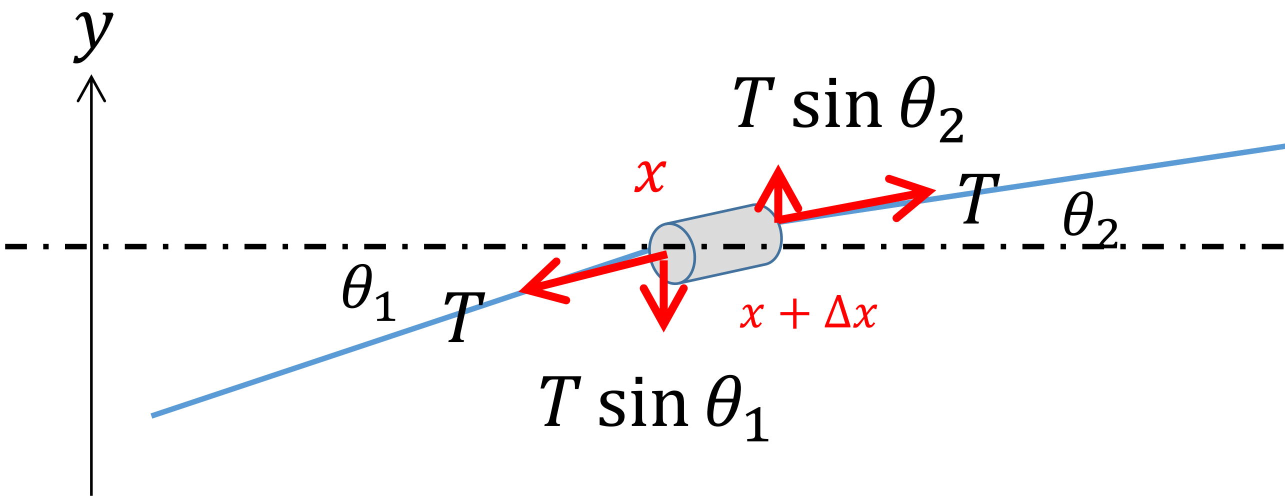
$$\Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

が求まった。更に、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T\frac{\Delta x}{\Delta m}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

となる。この式を波動方程式と呼ぶ



波の式は$y = A\sin(kx-\omega t)$なので、波動方程式に代入すると、

$$\omega^2 - \frac{T}{\sigma}k^2 = 0$$

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

となり、

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

波の進行速度が張力と線密度で決まる。

弦に定常波が現れる条件

波の進行速度が張力と線密度(実験条件)で決まることがわかった。

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

一方、振動数 f と波長 λ の関係は $v = f\lambda$ だったが、両端を固定された弦に定常波が生じる条件は、

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

だったので、

$$f = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

となり、定常波を発生させられる振動数が決まっていることがわかる。