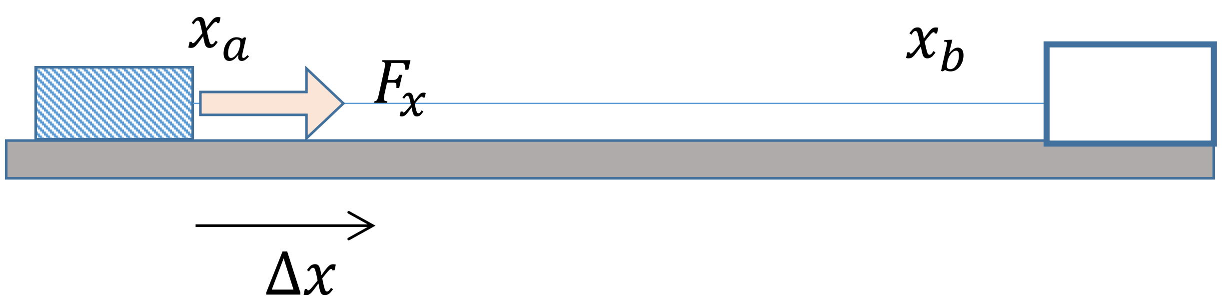
仕事とエネルギーを考えるために、滑走体の運動を考えよう。



力F_xを加えて物体を動かすとき、物体の位置がΔxだけ変位したとき、力は物体に仕事ΔWをしたという。仕事は次の式で表す。

$$\Delta W = F_x \Delta x$$

物体に仕事が行われると、物体にエネルギーが与えられた（仕事をする能力が増えた）と考える。

位置x_aからx_bまでΔxずつ変位させつづけたとすると、正味の仕事Wは次のように書ける。

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W = \sum_{i=1}^{n} F_x(x_i)\Delta x$$

Δxを無限小とする極限では、

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F_x(x)dx$$

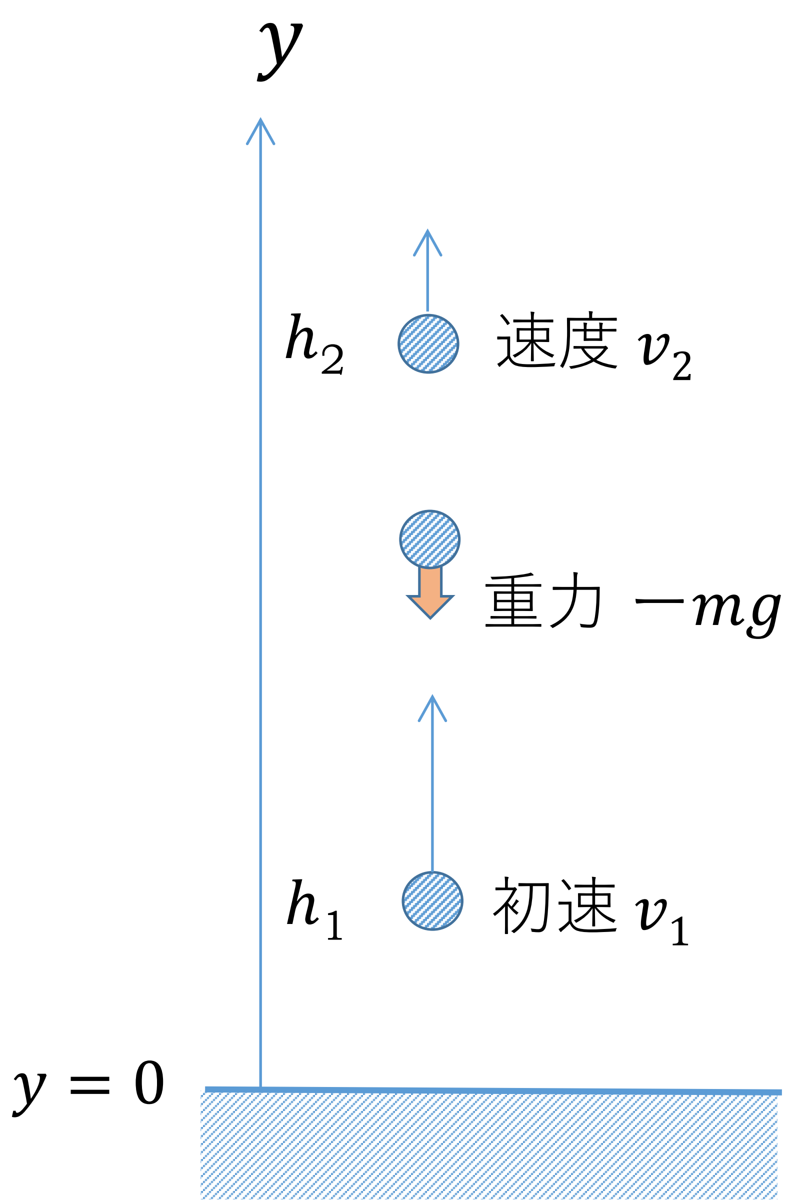
と書ける。$F_x(x)dx$は、$F_x(x)\frac{dx}{dt}dt = F_x(x)v_x dt$と書ける。$F_x = m\frac{dv_x}{dt}$を用いると、

$$W = m\int_{v_a}^{v_b} v_x dv_x = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

となる。右辺の各項を運動エネルギーKと呼び、この関係を仕事と運動エネルギーの定理と呼ぶ。

すなわち、物体に仕事Wが行われたことで、運動エネルギーが変化したことを示す。

$$W = K_2 - K_1$$



次に、重力のポテンシャルエネルギーを考えるために、物体の垂直運動を考えよう。

物体を高さh_1から初速v_1で投げ出して、高さh_2まで運動した。重力$(-mg)$が物体にした仕事は、

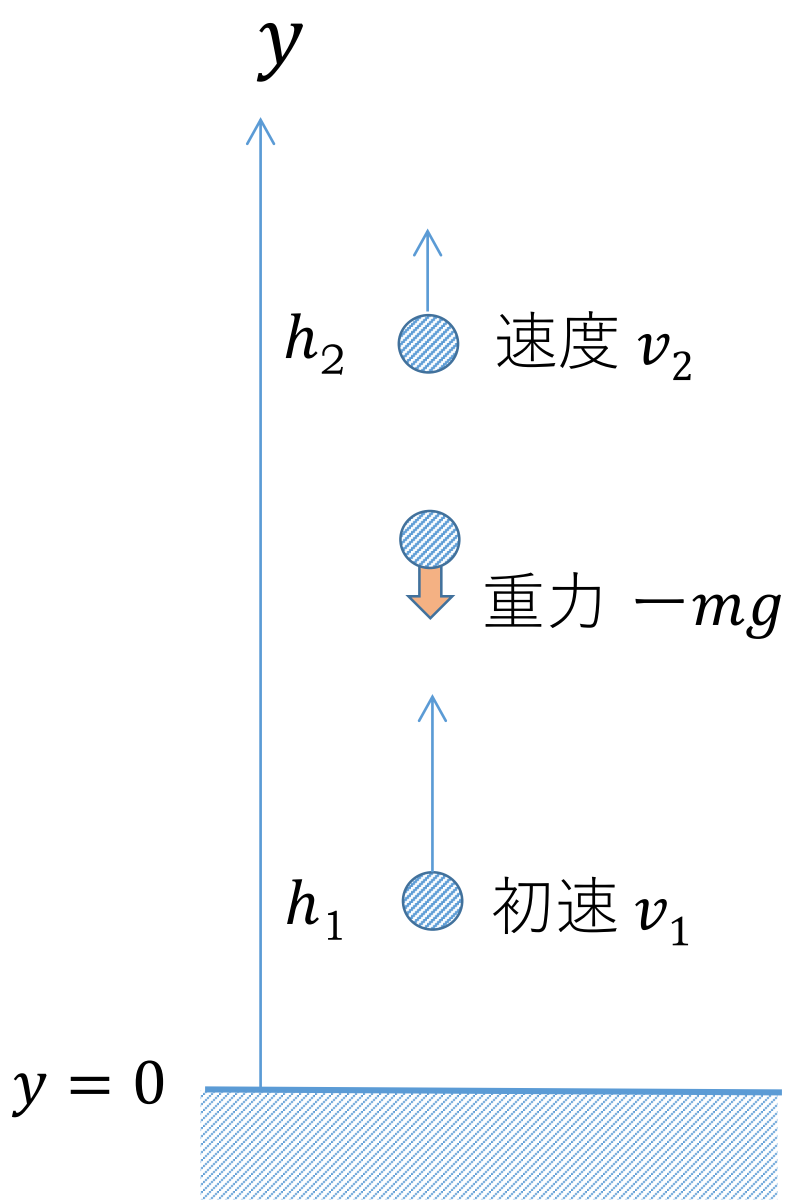
$$W = \int_{h_1}^{h_2} (-mg)dy = -mg(h_2 - h_1)$$

となる。仕事と運動エネルギーの定理から

$$-mg(h_2 - h_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

が成立する。



$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

左辺、右辺の第2項目は、基準からの高さだけで決まる量で、ポテンシャルエネルギーU（ここでは重力ポテンシャルエネルギー）と呼ぶ。この関係は、任意の時刻で成り立つので、次のように書く。

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

この関係は、任意の時刻で成り立つので、力学的エネルギーの保存則と呼び、$K + U = E$で得られる結果を力学的エネルギーと呼ぶ。