密度の測定(間接測定)
(実験指針P25~28)

予習の解説

z が ２つの測定値x_i, $y_i (i = 1,2, \ldots, n)$
から計算できる場合、標本平均$\bar{x}, \bar{y}$、
標本標準偏差σ_x ， σ_y とする。

・zの平均値（最良推定値）
標本平均$\bar{x}, \bar{y}$を用いた結果

$$\bar{z} = z(\bar{x}, \bar{y})$$

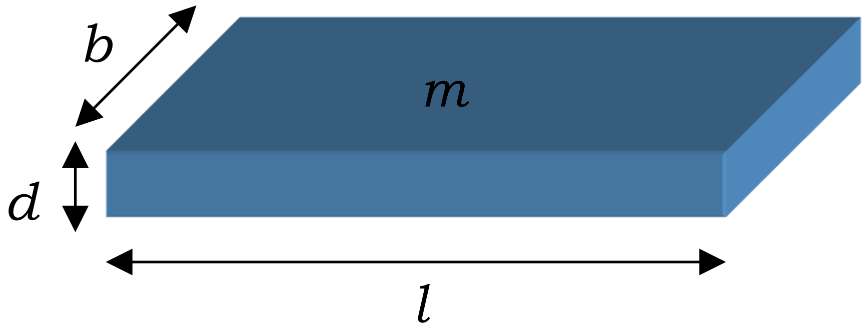
・z の標本標準偏差

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \sigma_y^2}$$

タイプBの不確かさを考慮すると

$$\delta z = \sqrt{\left(\left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \delta x_{\mathrm{c}}^2 + \left(\left. \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \right)^2 \delta y_{\mathrm{c}}^2}$$

予習の解説



$$\rho = \frac{m}{lbd}$$

$$\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}}\sqrt{\left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial l}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}}\right)^2 (\delta l_{\mathrm{C}})^2 + \left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial b}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}}\right)^2 (\delta b_{\mathrm{C}})^2 + \left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial d}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}}\right)^2 (\delta d_{\mathrm{C}})^2 + \left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}}\right)^2 (\delta m_{\mathrm{C}})^2}$$

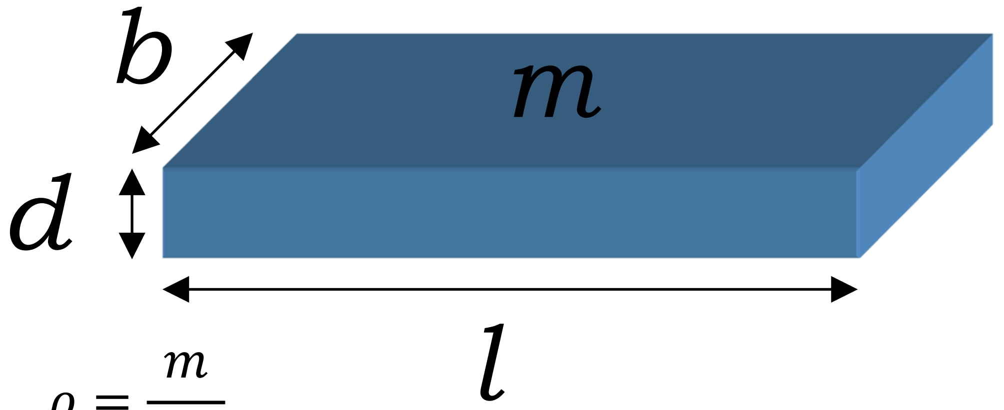
$$= \frac{\bar{l}\,\bar{b}\bar{d}}{\bar{m}}\sqrt{\left(-\frac{\bar{m}}{\bar{l}^2\,\bar{b}\bar{d}}\right)^2 (\delta l_{\mathrm{C}})^2 + \left(-\frac{\bar{m}}{\bar{l}\bar{b}^2\bar{d}}\right)^2 (\delta b_{\mathrm{C}})^2 + \left(-\frac{\bar{m}}{\bar{l}\bar{b}\bar{d}^2}\right)^2 (\delta d_{\mathrm{C}})^2 + \left(\frac{1}{\bar{l}\bar{b}\bar{d}}\right)^2 (\delta m_{\mathrm{C}})^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\delta l_{\mathrm{C}}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\delta b_{\mathrm{C}}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\delta d_{\mathrm{C}}}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\delta m_{\mathrm{C}}}{\bar{m}}\right)^2}$$

$$\delta\rho = \bar{\rho}\sqrt{\left(\frac{\delta l_{\mathrm{C}}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\delta b_{\mathrm{C}}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\delta d_{\mathrm{C}}}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\delta m_{\mathrm{C}}}{\bar{m}}\right)^2}$$

実験の手順

＊電子天秤で質量mを3回測定する。電子機器では、使用器具の社名と型番を記録する。
各教卓に1-2台置いてある。手が空いた時に、各自で測定しなさい。



$$\rho = \frac{m}{lbd}$$

$$\delta\rho = \bar{\rho}\sqrt{\left(\frac{\delta l_{\mathrm{c}}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\delta b_{\mathrm{c}}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\delta d_{\mathrm{c}}}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\delta m_{\mathrm{c}}}{\bar{m}}\right)^2}$$

① 板が理想的な直方体と考え、直尺でlの長さを3か所測定する。ノートの例の通りに、記録する。

② ノギスでbの長さを6か所測定する。まず予備測定として、直尺で測定し、ノギスの測定結果と比べながら実験せよ。

③ マイクロメータでdを10か所測定する。まず予備測定として、ノギスで測定し、マイクロメータの測定結果と比べながら実験せよ。実験前後での零点誤差を調べ、平均値から差し引く。

④ 密度の最終結果を求める。計算結果はノートの例の通りに丁寧に記録していくこと

・直尺を用いた横の長さ l の測定

使用器具　　直尺　分解能 0.1 mm

a_1 (mm)	a_2 (mm)	l (mm)
18.2	248.7	230.5
20.3	250.9	230.6
・		
・		
・		
・		

ノートの例に従って、長さを読み取って、ノートに記録していく。

(nは測定回数なので、測定項目ごとに異なる)

平均値　　$\bar{l}$ = 230.$\underline{533}$ mm

標準偏差　　σ_l = 0.0$\underline{577}$ mm

標準不確かさ　　$\delta l_A = \frac{\sigma_l}{\sqrt{n}} = \frac{0.0577\ \mathrm{mm}}{\sqrt{3}}$ = 0.0$\underline{333}$ mm

計算を簡単にするために、分解能をそのまま代入した

分解能　　δl_B = 0.1 mm

合成標準不確かさ　　$\delta l = \sqrt{(\delta l_A)^2 + (\delta l_B)^2} = \sqrt{(0.0333\ \mathrm{mm})^2 + (0.1\ \mathrm{mm})^2}$

= 0.$\underline{105}$ mm

拡張不確かさ(k=2 倍)の計算は、ここでは行わない。

最終結果の考え方

$\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}$が精度(データの精密さ)なので、精度をよくする($\Delta\rho$を小さくする)ことを考える。

$$\delta\rho = \bar{\rho}\sqrt{\left(\frac{\delta l_{\mathrm{C}}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\delta b_{\mathrm{C}}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\delta d_{\mathrm{C}}}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\delta m_{\mathrm{C}}}{\bar{m}}\right)^2}$$

各測定量の
相対不確かさの2乗

$$\left(\frac{\delta l_{\mathrm{C}}}{\bar{l}}\right)^2 = 2 \times 10^{-7}$$

$$\left(\frac{\delta b_{\mathrm{C}}}{\bar{b}}\right)^2 = 1 \times 10^{-6}$$

$$\left(\frac{\delta d_{\mathrm{C}}}{\bar{d}}\right)^2 = 2 \times 10^{-7}$$

$$\left(\frac{\delta m_{\mathrm{C}}}{\bar{m}}\right)^2 = 6 \times 10^{-9}$$

各測定量の相対不確かさで、より大きいものを小さくすれば、$\delta\rho$が小さくなる。

今回の例ではbなので、δb_{C}に注目する。

$$\delta b_{\mathrm{C}} = \sqrt{(\delta b_{\mathrm{A}})^2 + (\delta b_{\mathrm{B}})^2}$$

$$= \sqrt{(0.0311\ \mathrm{mm})^2 + (0.05\ \mathrm{mm})^2}$$

タイプAとBの不確かさの二乗和なので、より大きい方を小さくすれば、δb_{C}が小さくなる。

最終結果の考え方

・ δb_{A}の方が大きい　$\delta b_{\mathrm{A}} = \frac{\sigma_b}{\sqrt{n}}$

δb_{A}は測定条件が変わらないとき、測定結果はガウス分布に従ってばらつく。σ_bが一定とすれば、測定回数を増やせばδb_{A}が小さくできる。

・δb_{B}の方が大きい　$\delta b_{\mathrm{B}} = 0.05\ \mathrm{mm}$

δb_{B}は測定条件（ここでは測定器具の分解能）で決まっている。測定器具を変えることで、小さくできる。

$$\delta\rho = \bar{\rho}\sqrt{\left(\frac{\delta l_{\mathrm{C}}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\delta b_{\mathrm{C}}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\delta d_{\mathrm{C}}}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\delta m_{\mathrm{C}}}{\bar{m}}\right)^2}$$

不確かさが大きい測定を小さくすればよい。同程度大きいものが複数あるなら、それぞれを小さくすることを考えよう。

一方で、計算に分解能を用いる必要があるので、ゼロにはならない。どこまで小さくすればよいか？例えば文献値程度の有効数字で測定する場合などを考えてみる。

（以降、不確かさの式では合成標準不確かさを用いているが添え字のCは省略する。）

最終結果の考え方

文献値　アルミニウム　ρ_{lit}= 2.6989 g/cm^3

最終結果 $\bar{\rho} \pm k\delta\rho$ = (2.703 ± 0.005) g/cm^3

		不確かさの範囲					
密度	2.697	2.698	･･･	2.703	･･･	2.708	2.709

文献値
2.6989 g/cm^3

最終結果の不確かさはどのように考えれば良いか？ $k\delta\rho$ が ± 0.005 g/cm^3 なので、繰り返し測定すれば、2.698～2.708 g/cm^{3}が測定される確率が高いことを示している。

そこで、文献値と比較し、
「最確値は文献値と不確かさの範囲で一致した」や、
「最確値は文献値と不確かさの範囲で一致せず、文献値より5%大きかった」
のように報告すればよい。