密度の測定（間接測定）
（実験指針P25~28）

予習項目

物理学実験指針の「P25~28」をよく読みなさい。

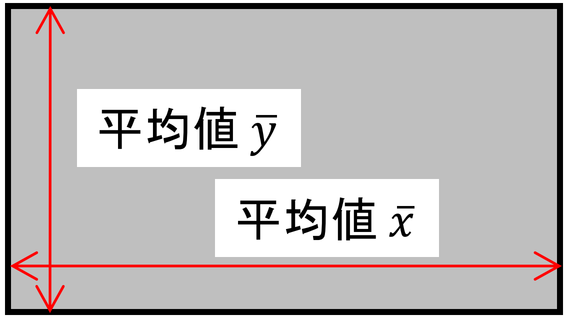
(1) z が 2つの測定値$x_i, y_i (i = 1,2, \ldots , n)$から計算できる場合、$z$ の標本標準偏差を求めよ。

(2) 密度の標本標準偏差$\delta\rho$の関係式を導出せよ。

ここでもまずは、指針を読み、その後、本スライド資料を読んで、解答をノートに作成しなさい。

複数の測定結果を関係式に代入して、最終結果を求める間接的な測定で、「測定量(物理量)のもっともらしい値」を推定することを考える。

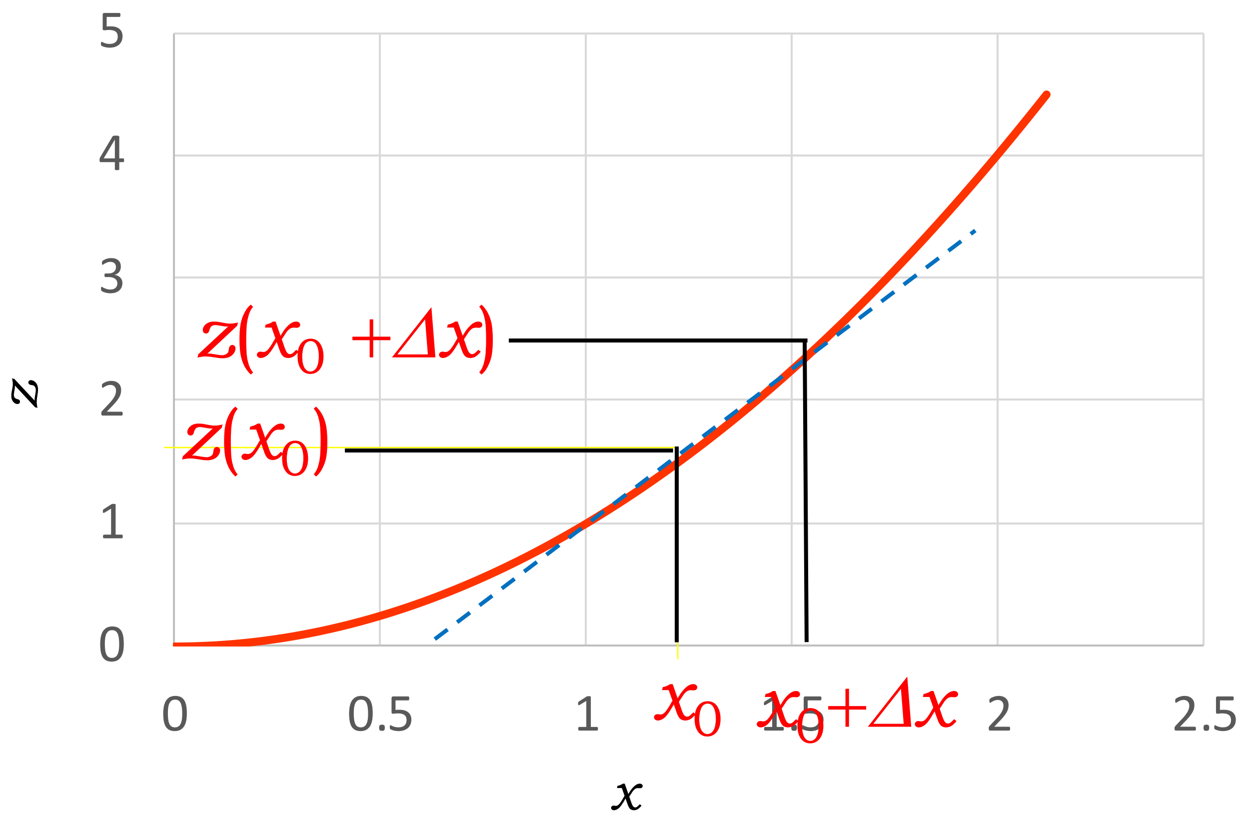
簡単に考えるために、まず長方形の面積を実験で求めることを考えよう。



面積は$S = x \times y$で計算できるが、実験では測定結果を用いるので

$$x \rightarrow \bar{x} \pm \delta x$$
$$y \rightarrow \bar{y} \pm \delta y$$

と考える必要がある。このδx、δyが最終結果にどのように影響するか？



測定量と、計算結果の関係を考えよう。図はxという測定量から $z(x) = x^2$ という計算をした結果である。この関数上で、測定量が x_0 のときに計算される量は

$$z(x_0) = (x_0)^2$$

となる.

もし測定量x_0が**「わずかにずれる」**（$x_0 \rightarrow x_0 + \Delta x$）と、計算される量も

$$z(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$$

となる。x_0のずれの影響を考えてみよう。

2つの計算結果の差を求める。

$$
\begin{aligned}
& z(x_0+\Delta x) = (x_0+\Delta x)^2 \\
& \qquad\qquad = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \\
-)\ & \qquad z(x_0) = x_0^2
\end{aligned}
$$

$$z(x_0+\Delta x) - z(x_0) = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

Δxはわずかなずれなので、その2乗$(\Delta x)^2$をゼロとする。また、左辺をΔzとすると

$$\underbrace{z(x_0+\Delta x) - z(x_0)}_{\Delta z\text{とする}} = 2x_0\Delta x + \underbrace{(\Delta x)^2}_{0}$$

$$\Delta z = 2x_0\Delta x$$

ここで$2x_0$は、与えられた関数$z(x) = x^2$をxで微分し、$x = x_0$を代入した結果となる。つまり、測定量が x_0 からΔxだけずれると、計算される量 z は「x_0での微分係数とΔx の積 」だけずれることを意味する。

そこで、

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.2x\right|_{x=x_0} = 2x_0$$

のように書くことにしよう。

x_0のずれの影響は、

$$\Delta z = \left.\frac{\Delta z}{\Delta x}\right|_{x=x_0} \Delta x$$

となる。

さて、xをn回測定し、その測定結果$x_i (i = 1,2, \dots, n)$ から、zを計算する。それぞれのx_iに対して、z_iが得られるので、zの平均値（最良推定値）を求める。

標本平均$\bar{x}$、残差$v_i = x_i - \bar{x}$ とすると、$|v_i|$が小さければ、計算結果のずれはxの標本平均$\bar{x}$ での微分係数と残差v_iの積で表されるので

$$z_i = z(x_i) = z(\bar{x} + v_i)$$
$$\cong z(\bar{x}) + \left.\frac{dz(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} v_i$$

が成り立つ。この平均値はzの最良推定値 $\bar{z}$ であり、

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z(x_i)}{n}$$
$$\cong \frac{\sum_{i=1}^{n} z(\bar{x})}{n} + \left.\frac{dz(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{n} = z(\bar{x})$$

となる。ここで$\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$ を使った。この結果は、zの最良推定値 $\bar{z}$ は、標本平均$\bar{x}$を用いて計算したz で良いことが解る。

このとき z の標本標準偏差の二乗は

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2$$
$$\approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{dz(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} v_i \right)^2$$
$$= \frac{1}{n-1} \left(\left.\frac{dz(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \right)^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$
$$= \left(\left.\frac{dz(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \right)^2 \sigma_x^2$$

標本標準偏差

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$$

が成り立つ。従って、z の標本標準偏差は

$$\sigma_z = \left| \left.\frac{dz(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \right| \sigma_x$$

次に、z が 2つの物理量の測定値の組
$x_i,\ y_i (i=1,2,\dots,n)$から計算できる場合を考えよう。標本平均$\bar{x}, \bar{y}$、残差$v_i = x_i - \bar{x}$, $w_i = y_i - \bar{y}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
z_i &= z(x_i, y_i) = z(\bar{x} + v_i, \bar{y} + w_i) \\
&\cong z(\bar{x}, \bar{y}) + \left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} v_i + \left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} w_i
\end{aligned}
$$

従って、zの平均値、すなわちzの最良推定値 $\bar{z}$ は

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} z(x_i, y_i)}{n} \\
&\cong \frac{\sum_{i=1}^{n} z(\bar{x}, \bar{y})}{n} + \left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{n} + \left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{n} \\
&= z(\bar{x}, \bar{y})
\end{aligned}
$$

となる。ここで $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$ を使った。

＊zが2つ以上の変数の関数である場合には、$\Delta z(x,y) = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\Delta y$ のように書く。
ここで ∂ は偏微分を表す。

このとき z の標本標準偏差の二乗は

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$$

$$\approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} v_i + \left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} w_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\left(\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + \left(\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} w_i^2\right]$$

$2\sum_{i=1}^{n} v_i w_i = 0$
とした。

$$= \left(\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}}\right)^2 \sigma_y^2$$

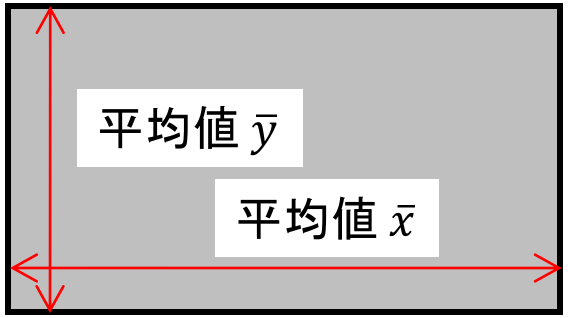
が成り立つ。従って、

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}}\right)^2 \sigma_y^2}$$

それぞれの物理量のタイプBの不確かさまでを考慮する（合成標準不確かさの2乗δx_{c}^2とδy_{c}^2を用いる）と

$$\delta z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}}\right)^2 \delta x_{\mathrm{c}}^2 + \left(\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}}\right)^2 \delta y_{\mathrm{c}}^2}$$

不確かさの伝播法則



長方形の面積測定の例

$$S(x,y) = x \times y$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = \left.\frac{\partial (xy)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = y\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = \bar{y}$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = \left.\frac{\partial (xy)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = x\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = \bar{x}$$

$$\delta S = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}}\right)^2 (\delta x_{\mathrm{C}})^2 + \left(\left.\frac{\partial S}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}}\right)^2 (\delta y_{\mathrm{C}})^2}$$

$$= \sqrt{(\bar{y})^2(\delta x_{\mathrm{C}})^2 + (\bar{x})^2(\delta y_{\mathrm{C}})^2}$$

また $\bar{S}$ の相対不確かさは、

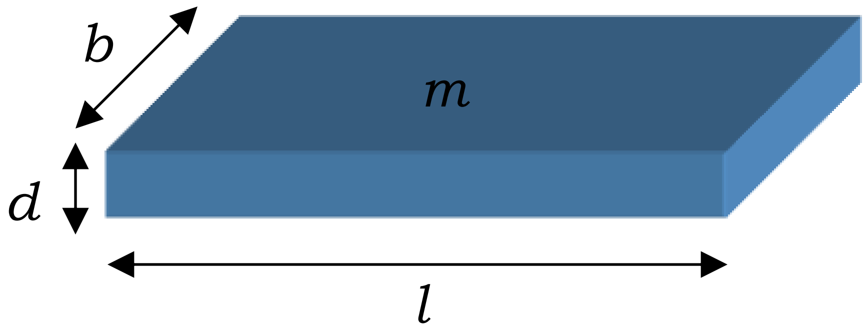
$$\frac{\delta S}{\bar{S}} = \frac{1}{\bar{S}}\sqrt{(\bar{y})^2(\delta x_{\mathrm{C}})^2 + (\bar{x})^2(\delta y_{\mathrm{C}})^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\bar{y}}{\bar{S}}\right)^2 (\delta x_{\mathrm{C}})^2 + \left(\frac{\bar{x}}{\bar{S}}\right)^2 (\delta y_{\mathrm{C}})^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\delta x_{\mathrm{C}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\delta y_{\mathrm{C}}}{\bar{y}}\right)^2}$$

なので、不確かさの式は

$$\delta S = \bar{S}\sqrt{\left(\frac{\delta x_{\mathrm{C}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\delta y_{\mathrm{C}}}{\bar{y}}\right)^2}$$

と求まる。この式のカッコ内が、測定量 x, y の相対不確かさであることに注意せよ。

密度ρの測定の場合



$$\rho = \frac{m}{lbd}$$

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial l}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{m}{lbd}\right)\Bigg|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}} = -\left.\frac{m}{l^2bd}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}} = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}^2\,\bar{b}\bar{d}}$$

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial b}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}} = \boxed{}$$

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial d}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}} = \boxed{}$$

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}} = \boxed{}$$

$$\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}}\sqrt{\left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial l}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}}\right)^2(\delta l_{\mathrm{C}})^2 + \left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial b}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}}\right)^2(\delta b_{\mathrm{C}})^2 + \left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial d}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}}\right)^2(\delta d_{\mathrm{C}})^2 + \left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|_{\substack{l=\bar{l}\\ b=\bar{b}\\ d=\bar{d}\\ m=\bar{m}}}\right)^2(\delta m_{\mathrm{C}})^2} = \boxed{}$$