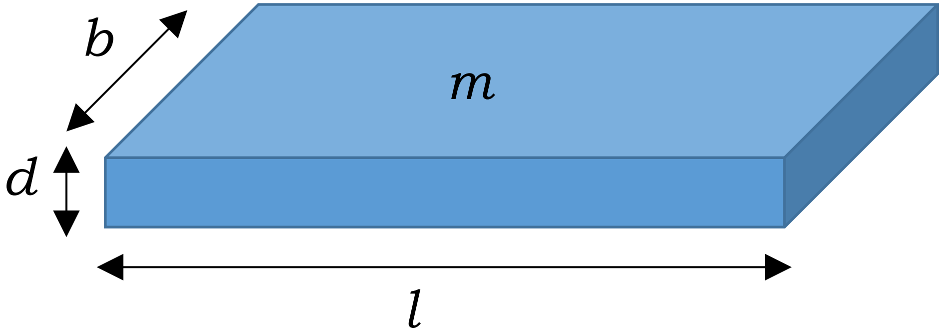
直接測定と不確かさ
4.5 密度の測定

目的

物質の密度の測定を通して，長さ，質量を測るための基本的な測定器具の取り扱い方，直接測定による測定の不確かさと測定の不確かさについて学ぶ.

金属板の密度の間接測定

密度の測定（材料固有の値）　$\rho = \dfrac{m}{lbd}$



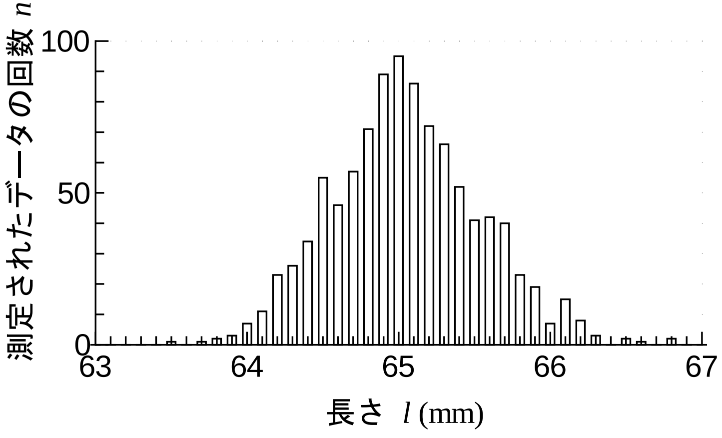
本実験では、物質の密度を求める。

長さ、質量を複数回測定し、密度を精密に測定する。
ここでは、長さと質量の不確かさを見積もるとともに、
密度を算出する。

7週目に、間接測定の不確かさを学び、密度の最終
結果を求める。

予習の解説

繰り返し行った測定結果の頻度のグラフは、ガウス分布関数とよく一致する。



$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

・標本平均 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

ガウス分布関数のμの**最良推定値**

・標本標準偏差

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum {v_i}^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}$$

ガウス分布関数のσの**最良推定値**

・タイプAの不確かさ $\delta x_{\mathrm{A}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

(平均のばらつきを表す)

・タイプBの不確かさ δx_{B}

(器具のもつ不確かさ)

・合成標準不確かさ

$$\delta x_{\mathrm{C}}=\sqrt{(\delta x_{\mathrm{A}})^2+(\delta x_{\mathrm{B}})^2}$$

(ある実験器具を用いて繰り返し測定を行って得られた測定値の平均のばらつき)

・相対不確かさ

(測定値の信頼性を表す指標)

実験方法

(1) 試料の横の長さ, 縦の長さ, 厚さ, 質量を測定する.
(2) 得られた測定値から、密度を求める.
(3) 計算された密度から、試料の材質を同定する.

不確かさを考慮した測定結果の求める方法

物体の長さを分解能0.1 mmの定規で、繰り返し(10回)測定した。

使用器具　定規
分解能 0.1 mm

$\delta x_{\mathrm{B}} = 0.1\ \mathrm{mm}$　　δx_{B}：実験前に決定

	長さ (mm)
x_1	65.0
x_2	65.4
⋮	65.1
	64.5
	64.4
	⋮

$$\bar{x} = 65.\underline{040}\cdots\ \mathrm{mm}$$
$$\sigma_x = 0.\underline{513}\cdots\ \mathrm{mm}$$

実験結果から計算

$$\delta x_{\mathrm{A}} = \frac{0.513\ \mathrm{mm}}{\sqrt{10}} = 0.\underline{162}\ \mathrm{mm}$$

$$\delta x_{\mathrm{A}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

＊下線に注目する。
（計算上あいまいさを含む桁で
最後に四捨五入する）

不確かさを考慮した測定結果を報告する

$\delta x_{\mathrm{A}} = 0.\underline{162}\ \mathrm{mm}$

$\delta x_{\mathrm{B}} = 0.1\ \mathrm{mm}$

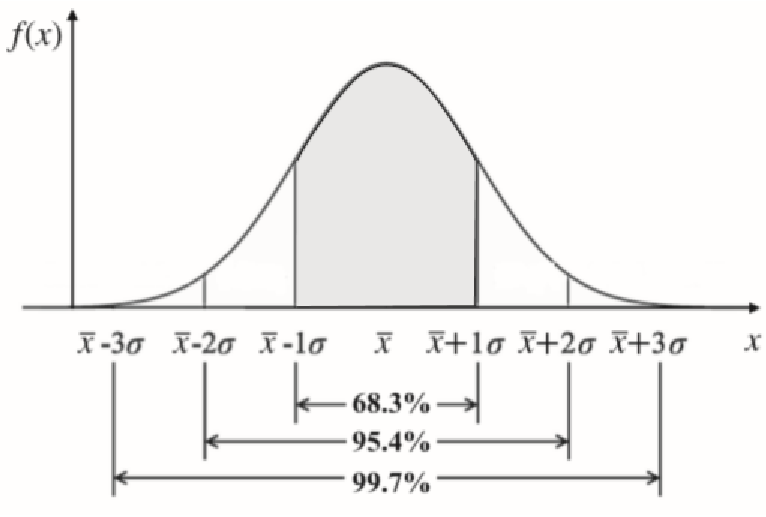
$$\delta x_{\mathrm{C}} = \sqrt{\delta x_{\mathrm{A}}^2 + \delta x_{\mathrm{B}}^2}$$

$$= \sqrt{(0.\underline{162}\ \mathrm{mm})^2 + (0.\underline{1}\ \mathrm{mm})^2}$$

$$= 0.\underline{190}\ \mathrm{mm}$$

$$k\delta x_{\mathrm{C}} = 2 \times 0.\underline{190}\ \mathrm{mm}$$

$$= 0.\underline{380}\ \mathrm{mm}$$



δx_{C}がδx_{A}(つまりσ_x)に由来すると、全体の統計の68.3%程度しか見ていない。$\pm 2\sigma_x$ を考えれば、 95.4%となる。そこで、δx_{C}を2倍する。*kを包含係数と呼び*、k = 2とする。

不確かさを考慮した測定結果を報告する

最終結果

$\bar{x} \pm k\delta x_{\mathrm{C}}$

$= (65.\underline{040} \pm 0.\underline{380})$ mm

平均値 ± 2×合成標準不確かさ

↓

$= (65.\underline{040} \pm 0.4)$ mm

2×合成標準不確かさ を1桁で書く

↓

$= (65.0 \pm 0.4)$ mm (ただし、包含係数 $k = 2$)

平均値を不確かさの桁に合わせる

最終結果の不確かさ$k\delta x_C$を小さくしたい。どうすればよいか？

$$\delta x_C = \sqrt{\delta x_A^2 + \delta x_B^2}$$

なので、δx_Aとδx_Bを小さくすることを考えよう。

・δx_Aは測定値のばらつき

$$\delta x_A = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

測定回数を増やすとδx_Aは減少する。

・δx_Bは測定器具の分解能で決まっている。使用する器具を変えないと変わらない。

どの程度まで小さくしたいかを考えて、実験計画を立てるべきである。

・$n \to \infty$とすれば$\delta x_A \to 0$となるが、δx_Bは0にならない。測定回数（労力）を増やしてδx_Aを小さくしても、最終結果の不確かさは変わらない場合もある。

・δx_Bは器具で決まるので、より分解能の小さな器具を用いればよい。

分解能が1/10になると、装置の金額は×10になる。δx_Aが小さくならないと、最終結果の不確かさは変わらない場合もある。

→つまり、δx_Aとδx_Bが同程度にすることを考えてみよう。

測定の精度と不確かさ

例） 分解能 0.1 mmの器具で測定した結果

$\bar{x}$ (mm)	$k\delta x_C$ (mm)	最終結果 (mm)	$k\delta x_C$ を有効数字1桁で表した場合
65.$\underline{040}$	0.$\underline{380}$	65.0 ±0.4	分解能の桁と不確かさの桁が一致
65.$\underline{040}$	$\underline{3.80}$	65 ± 4	分解能の桁に意味がない。δx_A を小さくした方が良い。
65.$\underline{040}$	0.0$\underline{380}$	65.04 ±0.04	分解能よりも小さな量まで検討して構わない

測定の精度と不確かさ

相対不確かさ（精度）
では、kを含めない

$\bar{x}$ (mm)	δx_C (mm)	最終結果 (mm)	δx_C / $\bar{x}$
560.0…	0.1	560.0 ±0.2	0.000179 =0.0002
65.00…	0.01	65.00 ± 0.02	0.000159 =0.0002
65.0…	0.1	65.0 ±0.2	0.00159 =0.002

大きさが異なるものを測定したのに、精度（測定の精密さ）は変わらない。

大きさが同程度のものを測定したのに、精度が異なる。

δx_Cは1桁になるので、
δx_C / $\bar{x}$も1桁にする

測定の精度と不確かさ

例えば、長さの合成標準不確かさδx_C=1 mmは大きいか？小さいか？

・長さが10 mm(1 cm)の製品のなら、相対不確かさ　10%

・長さが10000 mm(10 m)の製品なら、相対不確かさ　0.01%

δx_C=1 mmは1 mm程度間で測定結果がばらつくことを意味する。相対不確かさ（精度とも呼ばれる）を実験結果の精確さと考える。